

2008



[NESTANDARDNÍ APLIKAČNÍ ÚLOHY
A PROBLÉMY
pro 2. stupeň ZŠ a NG]

OBSAH

OBSAH	2
Úvod	3
1. Rýsování vzorů	4
2. Kreslení obrazce jedním tahem (traverzabilita)	8
3. Logické úlohy	11
4. Ohodnocené grafy	14
5. Dopravní a knihařský problém	16
6. Náhodný pokus, sběr a zpracování dat	20
7. Diofantovské problémy	24
8. Délky, obvody, obsahy a objemy	29
9. Prostorové úlohy	34
10. Matematický experiment	36
11. Eulerova věta a mnohostěny	40
12. Shodné útvary a souměrnosti	43
13. Skládání shodných zobrazení	48
14. Řešení úloh více způsoby	51
15. Pythagorova věta a osa úsečky	53
16. Kombinatorické úlohy	60
17. Neobvyklé geometrické útvary	64
18. Úlohy na útvary se stejným obsahem	67
19. Dvě záhady o čtverci a několik dalších úloh	70
20. Transformace souřadnicové sítě, plochy	74
21. Významné křivky	78
22. Náměty z historie měření Země a vesmíru pro výuku matematiky	85

Úvod

Soubor Nestandardní aplikační úlohy a problémy pro 2. stupeň základních škol a nižších gymnázií (NG) je zamýšlen jako metodický materiál pro učitele k tematickému okruhu téhož názvu vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace na 2. stupni ZŠ podle RVP ZV. Soubor předkládá řadu námětů a zároveň předpokládá aktivní spolupráci vyučujícího:

- a) ve výběru vhodného námětu vzhledem k úrovni žáků
- b) v pedagogickém přizpůsobení daného problému žákům (např. vhodná motivace, vyloučení nebo obejití neznámých termínů)
- c) ve volbě metodického přístupu (skupinová nebo frontální práce všech žáků ve třídě, individuální nebo zájmová činnost, domácí úkol, součást tematicky širšího projektu apod.)

Obsah souboru je rozdělen do 22 tematických celků. Jednotlivé náměty poskytují možnost uplatnění mezipředmětových vztahů včetně uplatnění průřezových témat. Náměty kladou důraz na vnitřní souvislosti matematiky (např. vztah aritmetiky nebo algebry a geometrie), na souvislosti matematiky s reálným světem, na matematický experiment a logické myšlení. Soubor také nabízí zajímavé netradiční úlohy z geometrie. V nabízených námětech lze výrazně uplatnit informační a komunikační technologie.

Jednotlivé problémy napomáhají rozvíjení klíčových kompetencí k učení a k řešení problémů a při vhodném vedení vyučujícího také ke kompetenci komunikativní, sociální a personální a nepochybně též ke kompetenci pracovní. Některé konkrétní momenty výchovného a vzdělávacího působení a metodického přístupu jsou uvedeny v úvodu jednotlivých tematických celků.

Soubor vychází ze vzdělávacího obsahu RVP ZV, jednotlivé náměty jej však přesahují nebo spíše rozšiřují. Některé úlohy a příklady jsou určeny pro nižší ročníky 2. stupně ZŠ, jiné předpokládají vyšší úroveň znalostí a dovedností, a jsou cíleny především na diferencovanou výuku na ZŠ a na nižší gymnázium. Náročnější tematické

celky nebo jejich části jsou označeny symbolem . Předložené náměty ovšem nejsou zcela netradiční, lze je nalézt ve starších i novějších tuzemských pedagogických materiálech, nebo byly převzaty ze zahraničí. Jde však většinou o úlohy nebo příklady, které jsou podle našeho názoru v současné škole méně frekventované z důvodů časových, z důvodů náročnosti nebo kvůli jejich menší publicitě. Účelem souboru je v neposlední řadě motivovat učitele k nalézání nebo tvorbě dalších námětů aktuálních z hlediska žáků a jejich okolí, rozšiřujících jejich obzor a rozvíjejících jejich dovednosti a postoje.

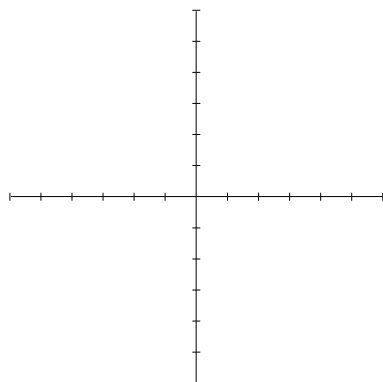
Na díle spolupracovala spolu s pracovníky Výzkumného ústavu pedagogického v Praze řada vyučujících, kteří nemálo přispěli svou pedagogickou zkušeností a erudicí jako autoři i recenzenti k závěrečné podobě souboru. Nejvíce bylo využito připomínek a námětů Mgr. Hany Böhmové, učitelky ZŠ profesora Švejcara, Praha 12, Mgr. Jany Jarošové a Mgr. Táni Poslušné, učitelky ZŠ Máj II, v Českých Budějovicích. Patří jim za to poděkování. Poděkování patří i recenzentce souboru Mgr. Ivaně Vaňkové, učitelce ZŠ Mělník.

Při práci s tímto materiálem přejeme hodně úspěchů a radosti z pedagogické práce.

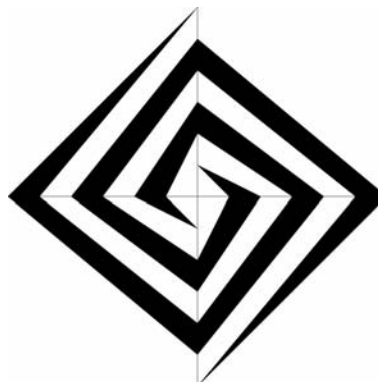
Jan Houska, Katarína Nemčíková

1. Rýsování vzorů

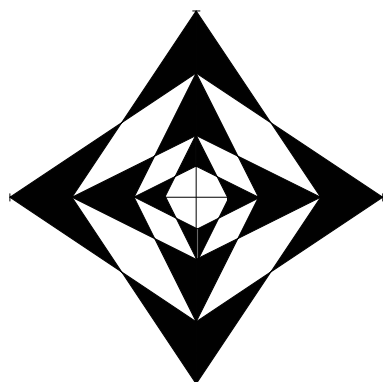
Jedním z námětů pro rozvíjení geometrické přesnosti a rýsování v ZŠ je konstrukce vzorů [1]. Téma je určeno spíše pro 1. stupeň, ale může se uplatnit i na vyšším stupni. Jedná se o vzory sestavené z úseček nebo částí kružnic podle dané předlohy. Východiskem je osa s vyznačenými dílky nebo dvě takové osy k sobě kolmé – propedeutika soustavy souřadnic. V některých případech vzniká jako obálka úseček obalová křivka. Narýsovaný vzor může být vyšrafován nebo vybarven. Vypracování vzoru vede žáky k systematickosti, přesnosti, pečlivosti rýsování a k estetickému vnímání výsledku. Žáci mohou vytvářet také vlastní vzory, které předvedou ostatním.



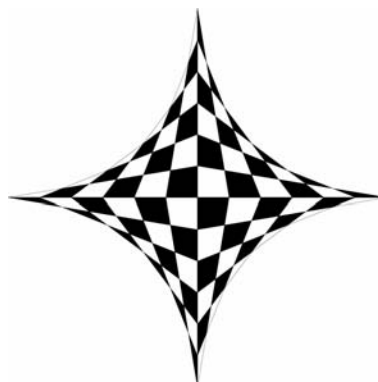
Obr. 1a



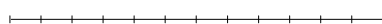
Obr. 1b



Obr. 1c



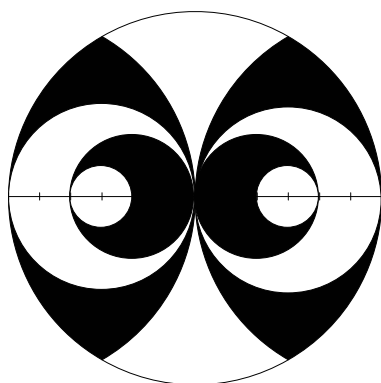
Obr. 1d (karty M. Booleové)



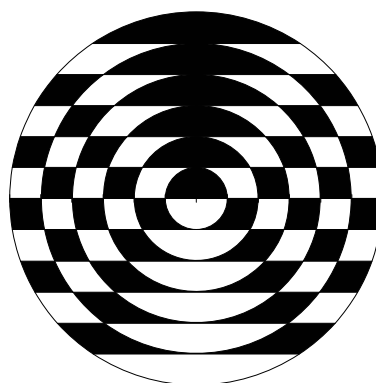
Obr. 2a



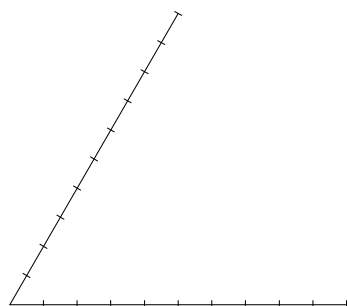
Obr. 2b



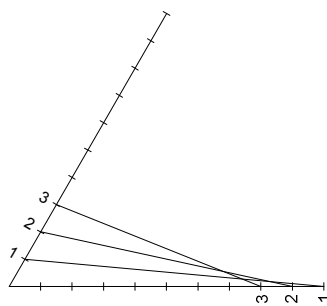
Obr. 2c



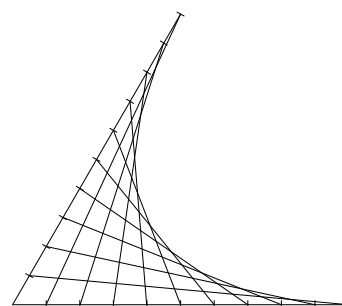
Obr. 2d



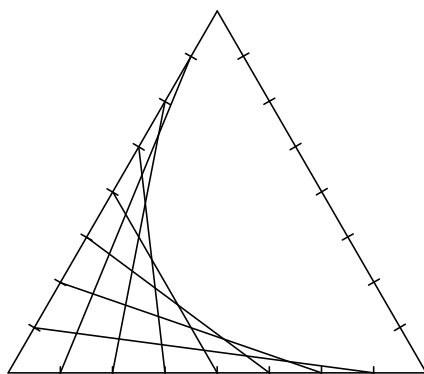
Obr. 3a



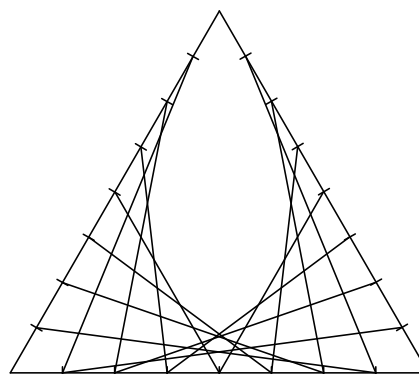
Obr. 3b



Obr. 3c



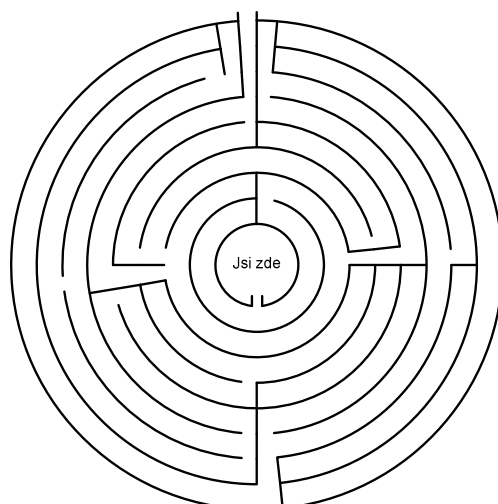
Obr. 4a



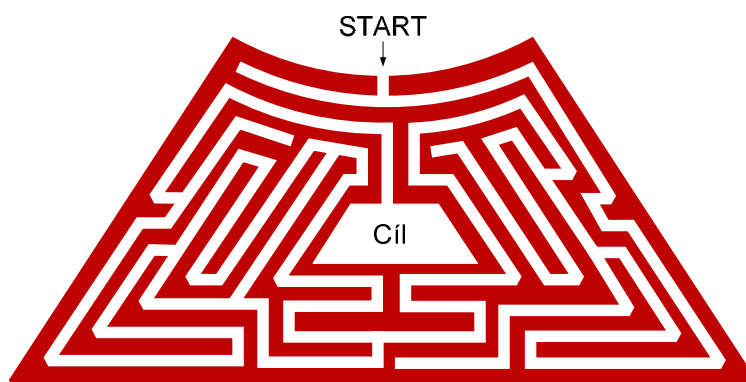
Obr. 4b

Bludiště

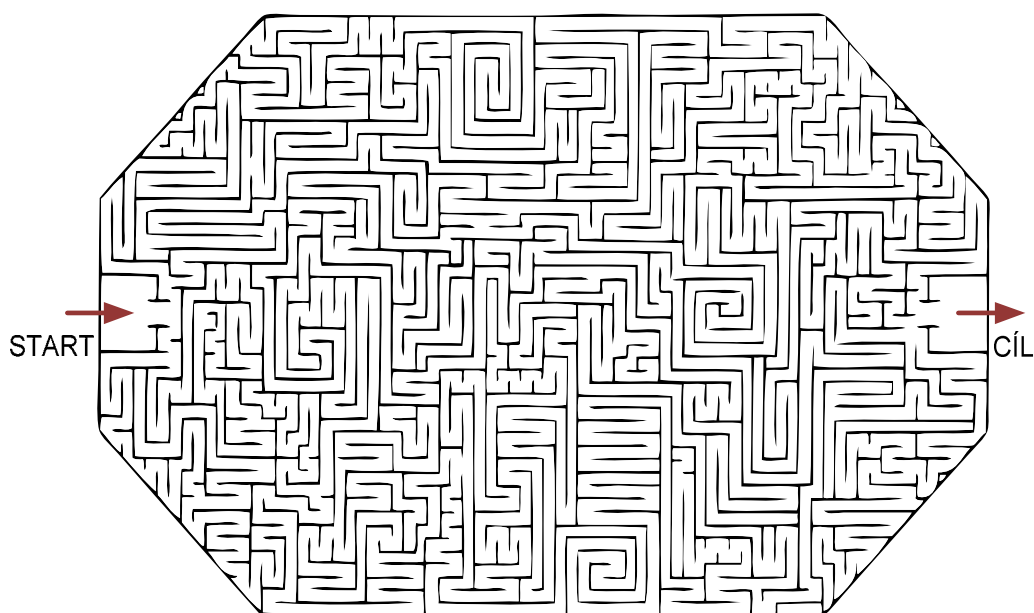
Ve školské matematice (geometrii) se většinou zabýváme pouze nejjednoduššími útvary vzniklými abstrakcí z reality, v rovině je to úsečka a kružnice. Přírodním setkáním žáků s odlišným geometrickým problémem, který žáci znají, je *průchod bludištěm*. Zde jsou cestou (trajektorií) *křivky* různých tvarů podobně jako křivkou je tvar silnice, železniční dráhy nebo řeky. Uveďme několik příkladů podle zahraničních učebnic.

Příklad 1

Obr. 1 [2]

Příklad 2

Obr. 2 [2]

Příklad 3

Obr. 3 [3]

Literatura:

- [1] SOBEL, Max A., MALETSKY, Evan M., HILL, Thomas J. *Essentials of Mathematics 2*. Canada: Ginn and Company, 1974. 454 s.
- [2] ELLIOT, H. A., MARSHALL, P. Bye , HANWELL, P. Alfred, NEUFELD, K. Allen. *Holt Mathematics 2*. Canada: Rinehart and Winston, 1976. 354 s.
- [3] COXFORD, Arthur, USISKIN, Zalman, HIRSCHHORN, Daniel. *Geometry: The University of Chicago School Mathematics Project*. Glenview, Illinois: Scott Foresman, 1994. 885 s.

2. Kreslení obrazce jedním tahem (traverzabilita)

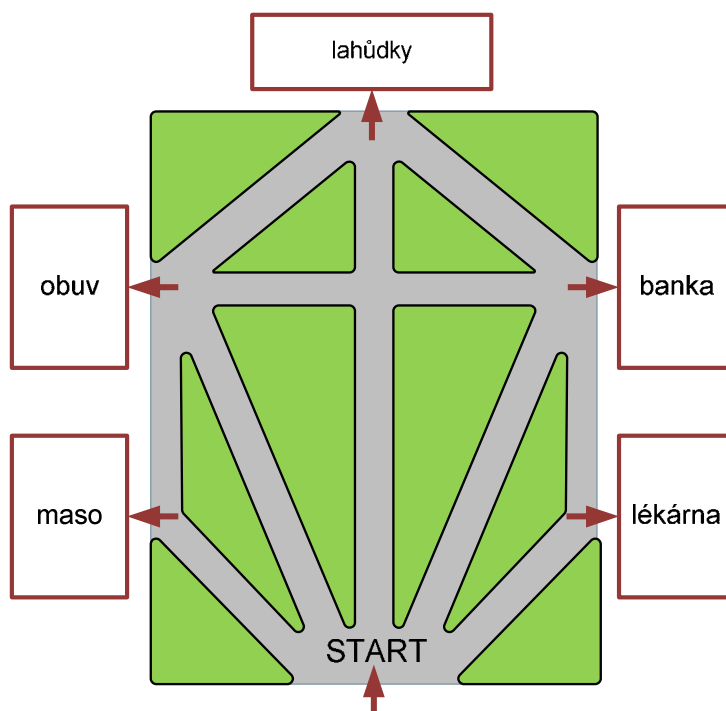
Úloha 1 – Nákupní bludiště

[1]

Na plánu (obr. 1) jsou znázorněny cesty k nákupním střediskům a k bance. Nakupující vyjde z místa START, má projít všechny cesty, ale každou jen jednou, křižovatky může procházet vícekrát.

- Může tímto způsobem skončit v lahůdkách?
- Může tímto způsobem skončit v obuvi?
- Může tímto způsobem skončit v lékárně?

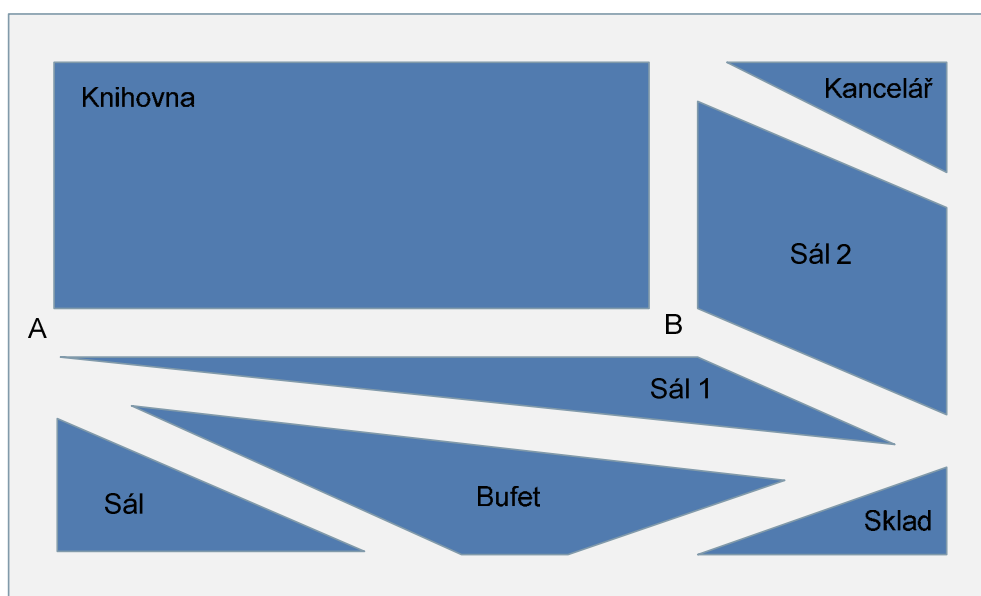
Výsledek: a) ano, b) ne, c) ne.



Obr. 1

Úloha 2 – Obhlídka muzea bezpečnostní službou [2]

Ostraha má projít všechny chodby jednoho podlaží muzea právě jednou. Zjistěte, zda je to možné a navrhnete postup. Uvažujte případ, že do obhlídky a) je nebo b) není zařazena celá vnější chodba.

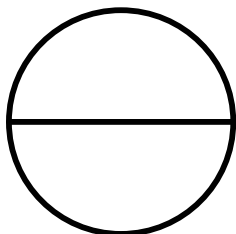


Obr. 2

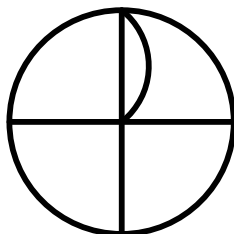
Výsledek: a) Ano, ostraha vyjde v místě A, přejde za sálem 2 a skončí v B.
b) Ne.

Úloha 3 – Kreslení obrázků jedním tahem [2]

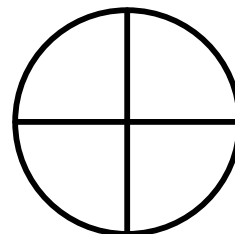
Pokuste se nakreslit obrázky 3 a, b, c, d, e jedním tahem (bez zvednutí tužky) tak, aby žádný oblouk nebyl kreslen dvakrát. Snadno zjistíte, že některé jednoduché takto nakreslit nelze a jiné třeba složitější ano.



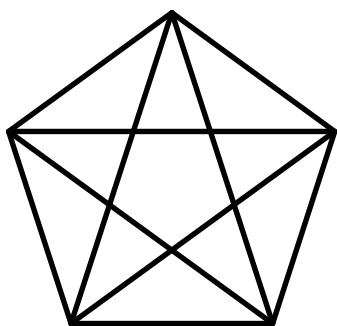
Obr. 3a



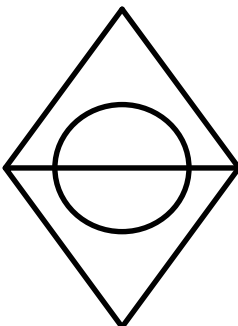
Obr. 3b



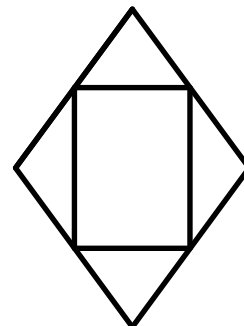
Obr. 3c



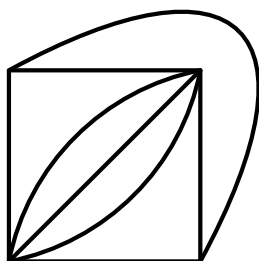
Obr. 3d



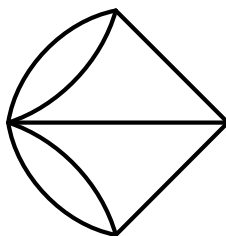
Obr. 3e



Obr. 3f



Obr. 3g



Obr. 3h

Výsledek: 3a – ano, 3b – ne, 3c – ne, 3d – ano, 3e – ano, 3f – ano, 3g – ne, 3h – ne.

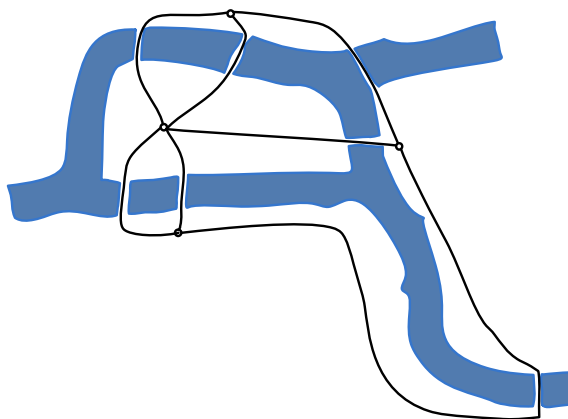
Vysvětlení

Zabýváme se uzavřenými křivkami, které nemají začátek ani konec. Mají však křižovatky (vrcholy, uzly). *Stupeň vrcholu křivky* je počet čar, které z něj vycházejí (nebo do něj vcházejí). Euler (čti: ojler) dokázal: **Uzavřenou křivku lze nakreslit jedním tahem (bez vícenásobného objíždění některé její části) právě tehdy, když nemá žádný nebo pouze dva vrcholy lichého stupně.** Při kreslení je třeba vyjít a skončit ve vrcholu lichého stupně. Pokud má uzavřená křivka více než dva vrcholy lichého stupně, nelze uvedeným způsobem jedním tahem nakreslit.

Úloha 4 – Procházka přes mosty ve městě Královci [4]

Historicky první obdobnou úlohu řešil významný švýcarský matematik *Leonhard Euler* v 18. století (v roce 2007 jsme slavili 300 let od jeho narození). Euleru zaujal problém, zda lze projít všech 7 mostů v pobaltském městě Královci tak, že se žádná část cesty nemá projít vícekrát (obr. 4) [4]. Pokuste se navrhnout takovou procházku.

Výsledek: Úloha nemá řešení, protože cesta obsahuje 4 vrcholy lichého stupně. Dokažte to.



Obr. 4

Další úkoly:

- Pokuste se na základě uvedeného Eulerova výsledku zdůvodnit, proč některá z křivek na obrázcích 3a až h lze nebo nelze nakreslit jedním tahem!
- Překreslete cesty z úloh Nákupní bludiště, Obhlídka muzea bezpečnostní službou a procházka přes mosty ve městě Královci schematicky jako křivky s vrcholy (křižovatkami) a vysvětlete řešení těchto úloh nebo jejich neřešitelnost vzhledem k Eulerovu výsledku.

Literatura:

- [1] SOBEL, Max A., MALETSKY, Evan M., HILL, Thomas J. *Essentials of Mathematics 2*. Canada: Ginn and Company, 1974. 454 s.
- [2] COXFORD, Arthur, USISKIN, Zalman, HIRSCHHORN, Daniel. *Geometry: The University of Chicago School Mathematics Project*. Glenview, Illinois: Scott Foresman, 1994. 885 s.
- [3] WIGLE, R., DOWLING, P., JENNINGS, P. *Mathematical Pursuits Two*. Canada: The Mackmillan Company, 1974. 230 s.
- [4] PELERMAN, J. I. *Zajímavá geometrie*. Praha: Mladá fronta, 1954. 225 s.
- [5] HOUSKA, Jan, et al. *Cvičení z matematiky pro I. a II. ročník gymnázií*. Praha: SPN, 1985. 264 s.

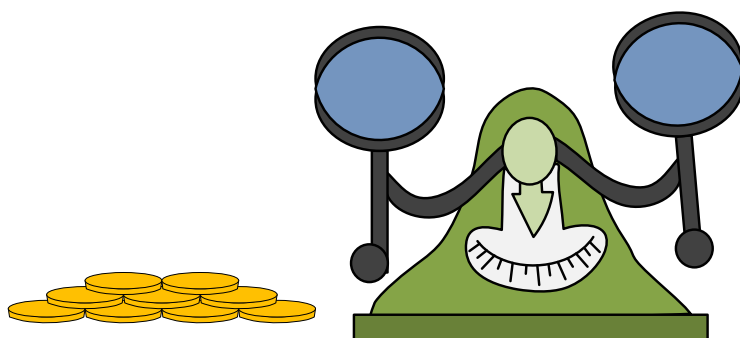
3. Logické úlohy

Úloha 1 – Falešná mince [1]

Máme 9 zdánlivě stejných mincí, ale jedna je lehčí. Můžeme užít rovnoramenné váhy, na nichž zjistíme, která ze dvou vážených věcí je lehčí. Ukažte, že stačí dvě vážení, aby byla lehčí (falešná) mince určena (obr. 1).

Řešení: Zvážíme dvě trojice mincí a zjistíme trojici s lehčí mincí. Potom zvážíme dvě mince z této trojice a zjistíme, která mince je falešná.

Jiná verze: Chytrý chalupník prodal na trhu ovce a dostal za ně 9 zlatých stejně vypadajících mincí. Jedna z nich však byla falešná, proto byla lehčí. Chytrý chalupník ale minci odhalil, stačila mu dvě vážení na rovnoramenných vahách. Víte, jak to udělal?

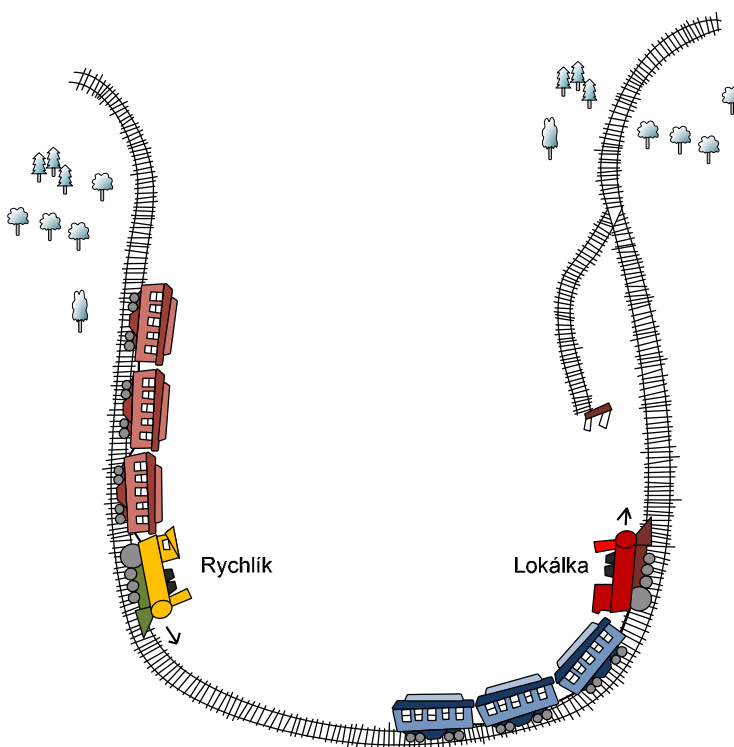


Obr. 1

Úloha 2 – Problém s rychlíkem [1]

Na trati stojí rychlík (lokomotiva a 3 vagony). Před rychlíkem však stojí na téže trati lokálka (též lokomotiva a 3 vagony). K dispozici je výhybka, na kterou se vejdou 2 vagony nebo lokomotiva a 1 vagon. Navrhněte postup tak, aby se lokálka vyhnula rychlíku (obr. 2).

Řešení: Lokálka zaveze 2 vagony na výhybku, rychlík se zbytkem lokálky předjede, zapojí 2 vagony na výhybce a zacouvá, aby lokomotiva lokálky s jedním vagonem mohla zacouvat na výhybku, potom rychlík předjede bez odpojených dvou vagonů lokálky, aby mohly být opět k lokálce připojeny.

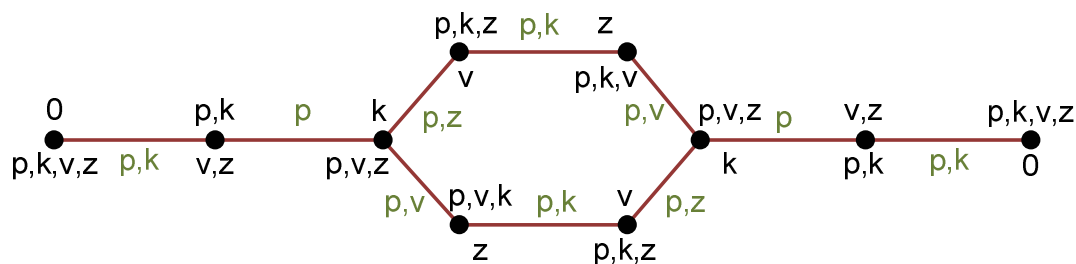


Obr. 2

Úloha 3 – Historická úloha o vlku, koze a zelí

Převozník měl převézt přes řeku vlka, kozu a hlávkou zelí a byl schopen uvést jen jednu věc (zvíře nebo zelí). Měl je však převézt nepoškozené, to znamená, že koza nemůže zůstat na břehu sama s vlkem a rovněž koza nemůže zůstat s hlávkou zelí. Navrhněte postup pro převoz všech tří věcí. (Alkuin z Yorku 735–804 n. l. na dvoře Karla Velikého, „Úlohy pro bystření mladíků“)

Výsledek: Řešení je dáno uvedeným schématem na obr. 3.



Obr. 3 – Schéma (dvou) řešení

Úloha 4 – Nejmenší počet koulí

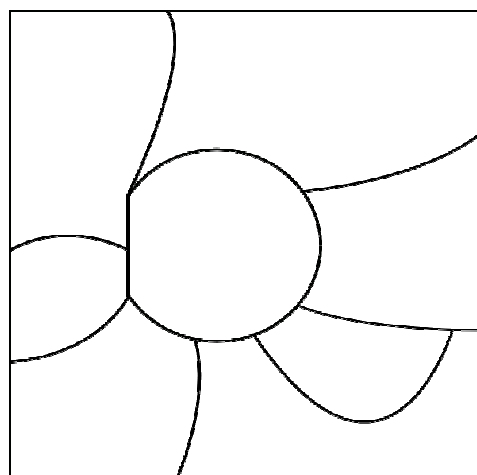
V sáčku je 5 bílých, 7 červených, 3 modré a 4 černé koule. Kolik koulí je třeba nejméně vytáhnout, aby mezi nimi byla určitě aspoň jedna bílá?

Výsledek: 15

Úloha 5 – Nejmenší počet barev [2]

Na obr. 4 je znázorněna mapa a na ní hranice několika území. Každé území má být vybarveno jednou barvou tak, aby sousední dvě území nebyla vybarvena stejnou barvou. Kolik nejméně barev je třeba k vybarvení mapy užít?

Výsledek: 4



Obr. 4

Další zajímavé úlohy (převzaty z <http://hadanky.chytrak.cz/>):

1. Máte 10 pytlů zlaťáků. Jeden z Vašich sluhů, kteří měli na starost přepravu peněz, Vás chtěl okrást, a v jednom z pytlů z každé mince, která normálně váží 10 gramů, 1 g zlata upiloval. Máte digitální váhy (dáte na ně předmět a ony ukáží, jakou má hmotnost). Dokážete na jedno vážení určit, který pytel obsahuje lehčí mince, a tedy kterého sluha vyhodit?
2. Máte 13 na pohled nerozeznatelných mincí. Jedna z nich se malinko liší v hmotnosti – nevíte, zda je lehčí či těžší. Dokážete na rovnoramenných vahách na tři vážení určit, která to je? Kdyby se Vám náhodou zdála úloha moc jednoduchá, zkuste 40 mincí na čtyři vážení – princip je stejný.
3. V zásuvce je 32 červených ponožek a 32 modrých ponožek. Levá a pravá ponožka jsou k nerozeznání. Taháte potmě ponožky ze zásuvky. Kolik jich musíte vytáhnout, abyste měli jistotu, že až se na ně podíváte, máte pár?

- 4. Řeka** – Na jednom břehu jsou tři misionáři a tři kanibalové. Lodička, do které se vejdou maximálně dvě osoby. Jak se všichni přepraví na druhou stranu, aby nikdy na žádném břehu nebyla přesila kanibalů nad misionáři?

Literatura:

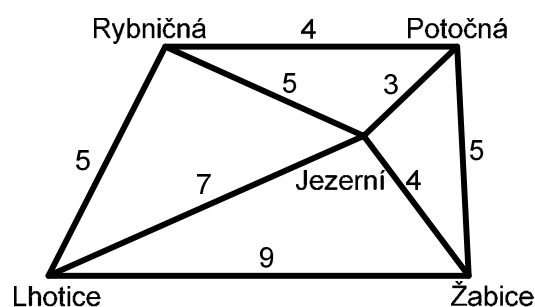
- [1] SOBEL, Max A., MALETSKY, Evan M., HILL, Thomas J. Essentials of Mathematics 2. Canada: Ginn and Company, 1974. 454 s.
- [2] HOUSKA, Jan, et al. *Cvičení z matematiky pro I. a II. ročník gymnázií*. Praha: SPN, 1985. 264 s.

4. Ohodnocené grafy

V praxi se často setkáváme s problémy, které souvisejí s tím, jak uspořít co nejvíce materiálu nebo času, jak provést daný úkol co nejúsporněji s nejmenšími ztrátami. Takové problémy vedou k matematickým úlohám, v nichž jde o nalezení jisté největší hodnoty (maxima) nebo naopak hodnoty nejmenší (minima). Řešení takových úloh lze často určit nebo alespoň odhadnout matematickým zkoušením (experimentováním).

Úloha 1 – Minimalizace rozvodné sítě [2]

Na obr. 1 jsou znázorněny obce Lhotice, Rybničná, Jezerní, Potočná, Žabice s uvedenými náklady na možné spoje elektrického vedení mezi dvěma obcemi. (Hodnoty jsou uvedeny v jistých jednotkách měny.) Všechny pět obcí má být spojeno jedním elektrickým vedením (rozvodnou sítí) tak, aby náklady na výstavbu sítě byly co nejmenší. Navrhněte plán tohoto vedení.



Obr. 1

Řešení – můžeme určit zkusmo, bude to vhodná čtveřice spojů, tedy též čtveřice čísel (nákladů). Součtem těchto čísel jsou celkové náklady. Takovou čtveřicí s minimálním součtem je čtveřice (5,4,4,3), které odpovídá jedno z propojení všech obcí. Celkové minimální náklady jsou 16.

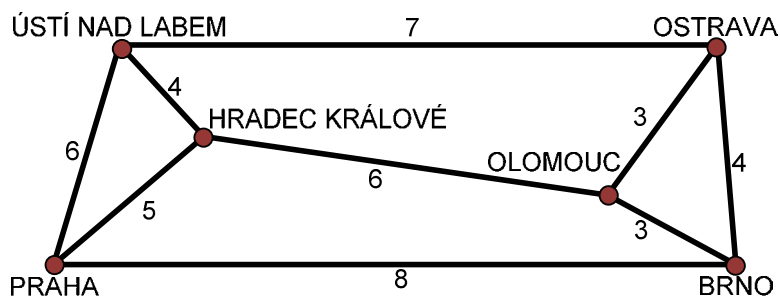
V souvislosti s řešením úlohy zodpovězte otázky:

- Kolik je všech možných čtveřic spojů? (70)
- Kolik je všech čtveřic spojů, které tvoří rozvodnou síť? (45)
- Existuje pětice spojů, která není rozvodnou sítí? (Ano, např. Lhotice – Jezerní – Potočná – Žabice)
- Existuje šestice spojů, která není rozvodnou sítí? (Ne)
- Kolik jsou celkové náklady na nejdražší rozvodnou síť se čtyřmi spoji? (26)

Úloha 2 – Problém obchodního cestujícího [2]

Cestující má vyjet z Prahy a navštívit Ústí nad Labem, Hradec Králové, Olomouc, Ostravu a Brno. Plán těchto měst s možným spojením a náklady na cestu je na obr. 2. Navrhněte trasu tak, aby cestující projel všemi městy s minimálními celkovými náklady:

- bez návratu do Prahy
- s návratem do Prahy



Obr. 2

Výsledek: a) trasa Praha – Hradec Králové – Ústí nad Labem – Ostrava – Olomouc – Brno, celkové náklady 22.

b) trasa jako v a), nakonec z Brna do Prahy, celkové náklady 30.

Úloha 3 – Problém diplomata

Diplomat vyjíždějící z Prahy má objet hlavní města sousedních států – Německa, Rakouska, Polska, Maďarska a Slovenska, pak se vrátí do Prahy. Náklady na cestu mezi jednotlivými městy v určitých jednotkách měny jsou: Praha-Vídeň 2,4; Praha-Budapešť 5,0; Praha-Bratislava 2,8; Praha-Varšava 3,4; Praha-Berlín 2,8; Vídeň-Bratislava 1,0; Vídeň-Varšava 3,6; Vídeň-Berlín 3,8; Vídeň-Budapešť 3,6; Berlín-Bratislava 3,2; Berlín-Varšava 3,0; Berlín-Budapešť 4,6; Bratislava-Varšava 3,0; Bratislava-Budapešť 1,6; Budapešť-Varšava 3,2. Nakreslete obrázek a navrhnete plán nejlevnější cesty diplomata.

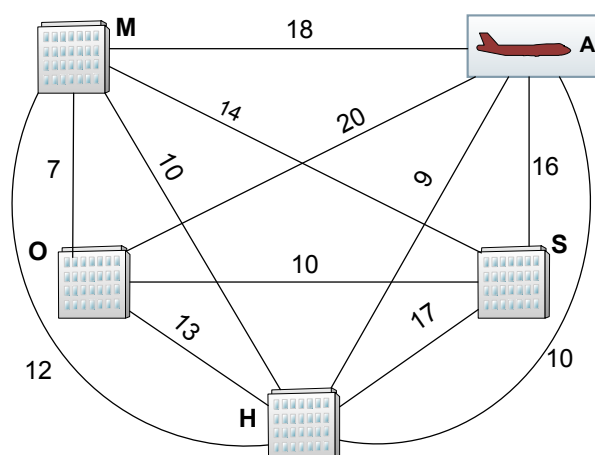
Výsledek: Jedna z optimálních možností: Praha-Vídeň-Bratislava-Budapešť-Varšava-Berlín-Praha, celkové náklady 14.

Úloha 3 – Objíždění hotelů

[1]

Na obr. 3 je znázorněno letiště A a čtyři hotely (O – Omni, H – Hilton, S – Sheraton, M – Marriot). Hodnoty hran grafu jsou časy v minutách na objížděku mezi jednotlivými lokacemi. Určete cestu autobusu tak, aby po vyjetí z letiště byly navštíveny všechny hotely s návratem na letiště v nejkratším čase.

Výsledek: Trasa AHMOSA, 52 minut.



Obr. 3

Problém objíždění hotelů odpovídá jednomu z předchozích problémů. Kterému?

Literatura:

- [1] SOBEL, Max A., MALETSKY, Evan M., HILL, Thomas J. *Essentials of Mathematics 2*. Canada: Ginn and Company, 1974. 454 s.
- [2] HOUSKA, Jan, et al. *Cvičení z matematiky pro I. a II. ročník gymnázií*. Praha: SPN, 1985. 264 s.
- [3] SOBEL, Max A., MALETSKY, Evan M. *Essentials of Mathematics 2 – A Sourcesbook of Aids Activities and Strategies*. Boston: Allyn and Bacon, 1999.

5. Dopravní a knihařský problém

Další dva náměty publikované v pedagogickém tisku [1], [2] nabízejí netradiční problémy matematické povahy vhodné pro současné pojetí výuky vzdělávacího oboru *Matematika a její aplikace* (podle RVP ZV jako *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*). Řešení vyžaduje především tvorbu plánu práce, systematickosti přístupu včetně grafického zachycení situací, kombinační uvažování a kvantitativní vyhodnocení jednotlivých možností. Jedná se v podstatě o jistý typ optimalizačních úloh, takové problémy jsou ovšem v praktickém životě velmi časté.

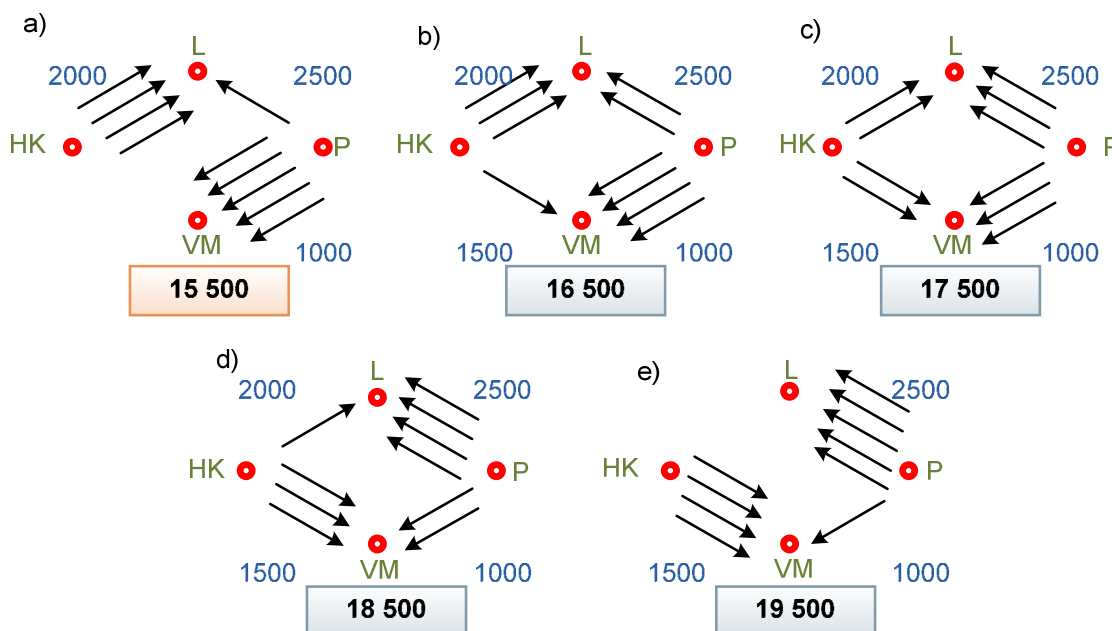
Příklad 1 – Montážní dílny

Ze dvou výrobních dílen podniku, jedné v Hradci Králové a druhé v Pardubicích, se mají rozvézt automobilové díly do dvou montážních středisek v Liberci a ve Vysokém Mýtě. Z dílny v Hradci se má vyvézt 200 dílů a z dílny v Pardubicích 300 dílů. Díly se rozvázejí v sériích po 50 kusech, do každého z obou montážních středisek se má dopravit 250 kusů. Přitom cena za dopravu jedné série z Hradce do Liberce je 2 000 Kč, z Hradce do Mýta 1 500 Kč, z Pardubic do Liberce 2 500 Kč a z Pardubic do Mýta 1 000 Kč. Představte si, že jste ekonomickým manažerem podniku a navrhnete nejlevnější způsob rozvozu.

Řešení: Situaci si přepíšeme do přehledné tabulky:

	HK (200)	P (300)
L (250)	2 000 Kč	2 500 Kč
VM (250)	1 500 Kč	1 000 Kč

Jednotlivé způsoby rozvozu znázorníme schematicky (šipka značí vždy sérii po 50 kusech):



Výsledek: Dostali jsme 5 způsobů rozvozu, nejlevnější je způsob a.) za 15 500 Kč.

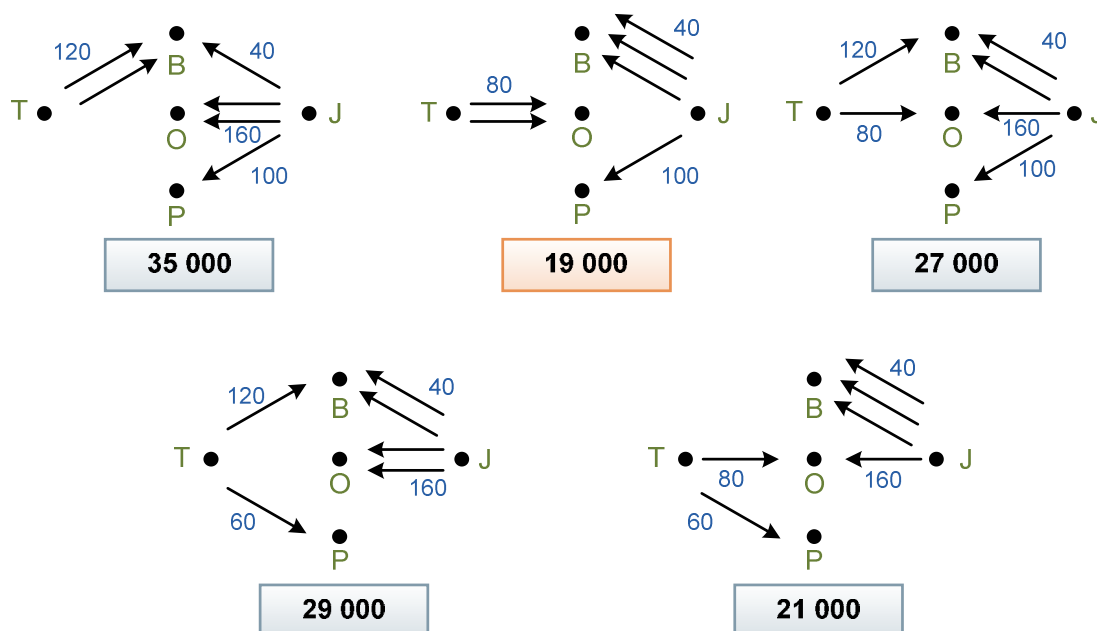
Příklad 2 – Rozvoz sportovních souprav

V krejčovské dílně v Praze ušili celkem 300 sportovních souprav. Soupravy umístili do dvou skladů mimo Prahu. V prvním skladu v Táboře je uloženo 100 souprav, ve druhém v Jihlavě je 200 souprav. Odtud se má podle objednávek dopravit do obchodu v Brně 150 kusů, do Olomouce 100 kusů a do Plzně 50 kusů tak, aby doprava souprav byla co nejlevnější. Dopravní náklady na jednu soupravu jsou uvedeny v tabulce, soupravy se přepravují vždy po 50 kusech. Vyzkoušejte si roli ekonoma v této firmě a na základě údajů v tabulce doporučte přepravu s nejmenšími náklady.

Řešení: Tabulka přepravních nákladů:

	Brno (150)	Olomouc (100)	Plzeň (50)
Tábor (100)	120 Kč	80 Kč	60 Kč
Jihlava (200)	40 Kč	160 Kč	100 Kč

Jednotlivé způsoby přepravy znázorníme schematicky, jedna šipka značí přepravu 50 kusů:



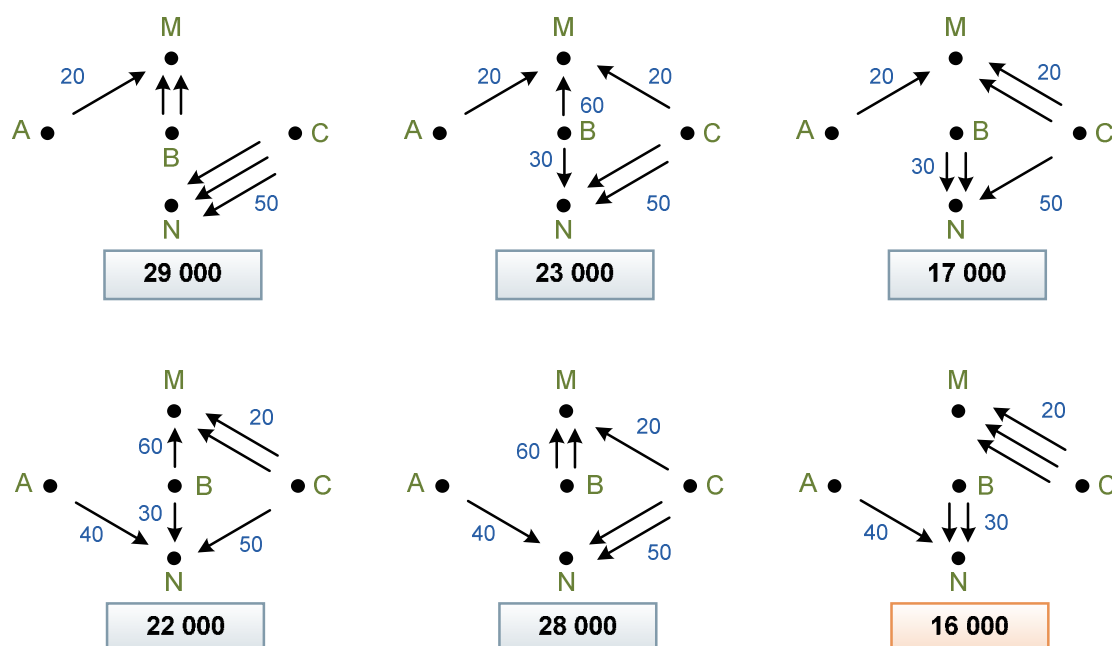
Výsledek: Existuje 5 způsobů přepravy, nejlevnější je způsob (2) za 19 000 Kč. Optimální způsob přepravy je uveden na obr. 1b, náklady jsou 19 000 Kč.

Problém lze samozřejmě zjednodušit nebo znáročnit počtem výrobních středisek nebo počtem obchodů, případně číselnými hodnotami. Uvedeme ještě jednu modifikaci.

Příklad 3

Vypracujte nejlevnější dopravní plán pro přepravu výrobků v sériích po 100 kusech ze tří skladů A, B, C do dvou spotřebních středisek M a N, jestliže se do každého z obou středisek M, N má dopravit 300 výrobků tak, že se ze skladů A, B, C po řadě odebere 100, 200 a 300 výrobků. Dopravní náklady na jeden výrobek jsou 20 Kč z A do M, 60 Kč z B do M, 20 Kč z C do M, 40 Kč z A do N, 30 Kč z B do N, 50 Kč z C do N.

Řešení:



Výsledek: Existuje 6 způsobů přepravy, nejlevnější způsob je: z A 100 výrobků do N, z B 200 výrobků do N, z C 300 výrobků do M. Minimální náklady jsou 16 000 Kč.

Jiným optimalizačním problémem řešeným graficky vyhodnocením všech možností je knihařský problém.

Příklad 4 – knihařský problém

Nakladatelství má vydat dvě knihy. U první jsou třeba 4 časové jednotky (zpravidla týdny) na tisk a 3 pro vazbu, u druhé 3 časové jednotky pro tisk a 2 na vazbu. V jakém pořadí se mají knihy vydat, aby se tiskárna nezastavila, a aby knihy byly co nejdříve svázané?

Řešení:

Existují dvě možnosti pořadí pro tisk obou knih, následně po sobě.

- Jestliže napřed vytiskneme první knihu, může být svázána bezprostředně při tisku druhé knihy. Celková časová náročnost je 9 jednotek času.
- Jestliže začneme napřed s tiskem druhé knihy, potom časová náročnost výroby obou knih je o 1 časovou jednotku větší, tj. 10.

Z hlediska času je tedy výhodnější první způsob.

Vyřešíme ještě knihařský problém v náročnější variantě.

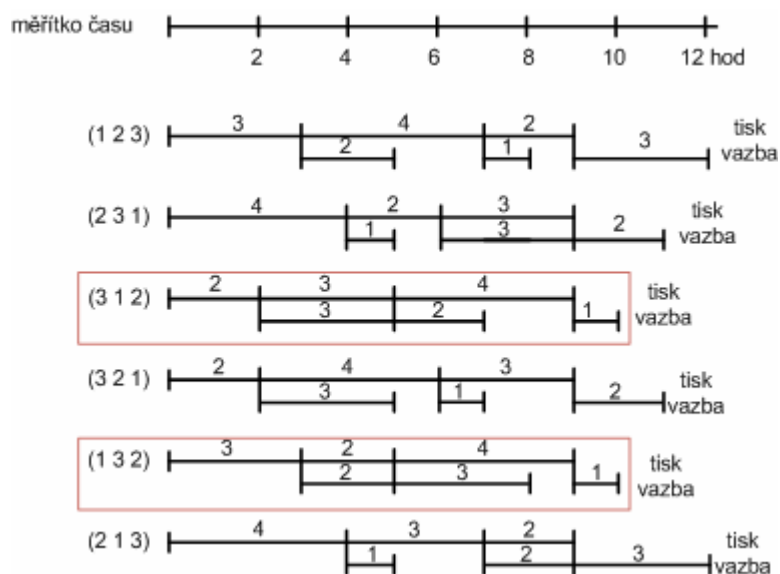
Příklad 5

Nakladatelství má vydat tři knihy. Časové podmínky jsou uvedeny v tabulce:

	tisk	vazba
1. kniha	3	2
2. kniha	4	1
3. kniha	2	3

Řešení:

Pro 3 knihy máme celkem 6 pořadí. Z náčrtu všech situací snadno zjistíme, že optimální jsou pořadí (3, 1, 2) nebo (1, 3, 2). V obou případech je časová náročnost 10. Při těchto dvou pořadích je ve vazačské dílně nejmeně ztrátových časů.

**Literatura:**

- [1] PROCHÁZKA, J.: *Dopravní problém na ZDŠ*, Matematika a fyzika ve škole, roč. 5 (1974–75), č. 1, str. 5–16.
- [2] PROCHÁZKA, J.: *Knihařský problém na ZDŠ*, Matematika a fyzika ve škole, roč. 5 (1974–75), č. 2, str. 92–97.
- [3] HOUSKA, Jan, et al. *Cvičení z matematiky pro I. a II. ročník gymnázií*. Praha: SPN, 1985. 264 s.

6. Náhodný pokus, sběr a zpracování dat

Námět náhodného pokusu a jeho využití pro sběr a zpracování dat, realizace nebo simulace náhodného pokusu v rámci vyučování matematiky není dosud běžnou součástí výuky v našich základních školách. Přitom realizace náhodného pokusu ve třídě (např. házením hrací kostkou, mincí nebo tažením žetonů, případně pomocí počítače) spolu se sběrem a vyhodnocením získaných dat spojená se skupinovou prací žáků je nepochybně jedním z vhodných způsobů jak dosáhnout očekávaných výstupů tematického okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty* vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* podle RVP ZV.

Žáci tímto způsobem data získávají a jsou vedeni k jejich zpracování – vypracování tabulky nebo grafu. Zjišťují počet příznivých případů určitého náhodného jevu vzhledem k počtu všech pokusů, mohou odhadovat počet příznivých případů při plánovaném počtu pokusů a zlepšovat tento odhad při opakování náhodného pokusu. Mohou, ale nemusí vypočítat pomocí kalkulátoru poměr příznivých výsledků ke všem provedeným pokusům (tzv. relativní četnost) a sledovat, že při větším počtu pokusů se tento poměr blíží k určité hodnotě (pravděpodobnosti daného náhodného jevu). V některých případech mohou žáci logickou úvahou vysvětlit, kolik příznivých výsledků připadá na počet všech možných výsledků.

Sledování náhodného jevu obohacují žákovo chápání matematiky a jejího významu v reálném světě. Bude velmi žádoucí vyhledávat vhodné náměty ze života žáků a jeho okolí, shromažďovat a předávat metodické zkušenosti v tomto směru, motivem by měl být tento odstavec.

Příklad 1

- Házejte 10krát, 20krát, 30krát, 40krát, 50krát mincí a počítejte, kolikrát padne „lev“.
- Sestavte tabulku a počítejte pro každý případ poměr počtu „lvů“ ku počtu všech hodů (relativní četnost). Ke které hodnotě se blíží relativní četnost, když se počet hodů zvyšuje?
- Hodte dvakrát po sobě mincí (nebo dvěma mincemi současně), pokus opakujte vícekrát a počítejte, kolikrát padne v obou případech „lev“. Sestavte tabulku a počítejte relativní četnost pro různé počty hodů. K čemu se blíží relativní četnost, když se počet hodů zvyšuje?
- Opakujte pokus z příkladu 1a) s hrací kostkou, jako příznivý případ uvažujte hod sudého čísla (potom čísel 1 a 2, pouze čísla 6). Sledujte relativní četnost vzhledem k počtu všech pokusů a pozorování vysvětlete.
- Každý žák si narýsuje číselnou osu s body -5, -4, -3, ..., 4, 5. Potom hází mincí a pohybuje se vlevo nebo vpravo od nuly o jednotku podle toho, zda hodí lva nebo pannu. Startuje se v nule a všichni mají vždy stejný počet hodů, vyhrává ten, kdo první dosáhne bodu 5 nebo -5.
- Aktivitu doplňte úvahou o výčtu všech možností pro 5 hodů a výpočtem odpovídající pravděpodobnosti pro jednotlivé body -4, -3, ..., 3, 4 při pěti hodech.

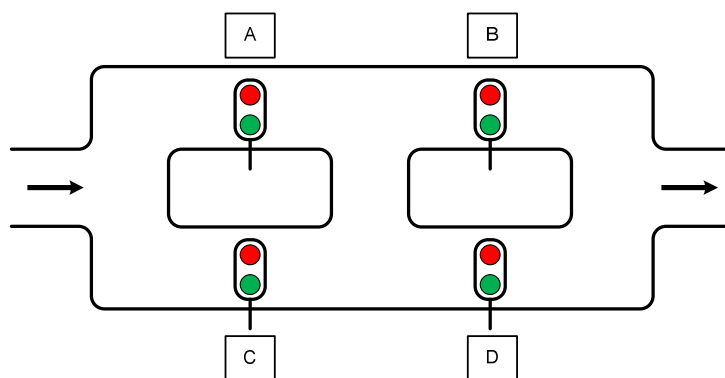
$$\text{Výsledek: } P(-3) = P(3) = \frac{5}{32} = 0,15625, P(-1) = P(1) = \frac{5}{16} = 0,3125$$

$$P(-5) = P(5) = \frac{1}{32} = 0,03125$$

Pravděpodobnosti pro sudé body jsou nulové.

Příklad 2 – Průjezd náměstím

Na plánu (obr. 1) jsou nakresleny možné průjezdy náměstím se čtyřmi semaforey A, B, C, D, které se rozsvěcují náhodně (červená, zelená). Automobilista chce během krátké doby (např. 30 sekund) projet náměstím, kdy semaforey nezmění svou polohu.



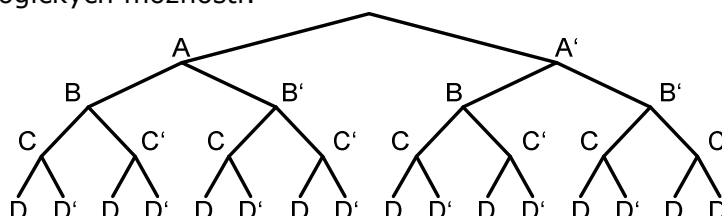
Obr. 1

- a) Simulujte náhodný jev polohy čtyř semaforů, která určuje průjezdnost nebo neprůjezdnost náměstí hodem čtyř žetonů A, B, C, D (červená – C, zelená – Z). Sestavte tabulku pro jistý počet pokusů a počítejte relativní četnosti průjezdu.

	1. hod	2. hod	
A:	Z	Z	
B:	C	C	
C:	C	Z	
D:	Z	C	
Průjezd:	ano	ne	

- b) Pomocí stromu všech logických možností určete počet všech případů a počet příznivých případů. (Písmena bez čárky značí zelenou – Z, písmena s čárkou červenou – C.) [2]

Strom všech logických možností:



Výčet všech možností:

ABCD	AB'CD	A'BCD	A'B'CD
ABCD'	AB'CD'	A'BCD'	A'B'CD'
ABC'D	AB'C'D	A'BC'D	A'B'C'D
ABC'D'	AB'C'D'	A'BC'D'	A'B'C'D'

Výčet všech průjezdů:

ABCD	AB'CD	A'BCD	A'B'CD
ABCD'	AB'CD'	A'BC'D	
ABC'D			
ABC'D'			

- c) Pomocí stromu všech logických možností určete počet všech případů a počet příznivých případů. Vypočítejte pravděpodobnost průjezdu a porovnejte ji s výsledky

úlohy a). Výsledek: $\frac{9}{16} \doteq 0,563$

d) Řešte úlohu a), b) pro případ, že semafor A je stále uzavřen.

Výsledek: $\frac{3}{8} = 0,375$

Příklad 3 – Chodec ve městě

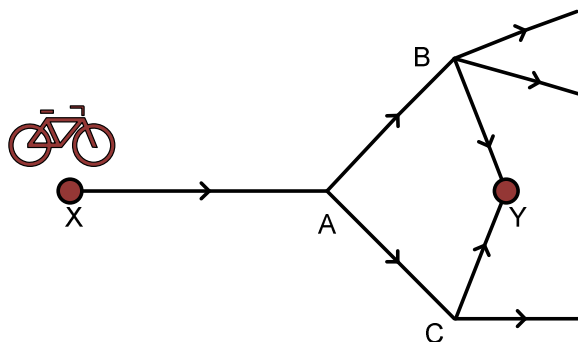
Na plánu cest ve městě znázorněnému čtvercovou sítí 3 x 3 jsou vyznačeny body A [0,0], B [3,3], C [2,1]. Chodec z A do B může jít pouze po čtvercové síti vpravo nebo nahoru, odbočit lze pouze v mřížových bodech.

- a) Simulujte náhodný pokus průchodu městem z A do B kolem stanoviště známého (hledané budovy) v bodě C za daných podmínek např. tak, že náhodně vybíráte pořadí ze šesti žetonů, z nichž tři jsou označeny písmeny „p“ a tři písmeny „n“. Sestavte tabulku a počítejte relativní četnosti jevu, že chodec při náhodné volbě cesty projde bodem C. Příklad příznivého výsledku (p, p, n, n, n, p).
- b) Určete počet všech možných cest a počet příznivých tras z úlohy a). Vypočítejte pravděpodobnost a porovnejte s výsledky v úloze a).

Výsledek: Všechny cest je 20, příznivých tras 9. Pravděpodobnost $\frac{9}{20} = 0,45$

Příklad 4 – Cyklista, který nezná cestu [2]

Z města X do města Y se lze dostat dvěma cestami podle plánu (obr. 2). Cyklista, který nezná cestu, vyjede správným směrem z města X, ale na každé křižovatce A, B, C se rozhoduje náhodně. Všechny výjezdy z každé křižovatky jsou stejně pravděpodobné.



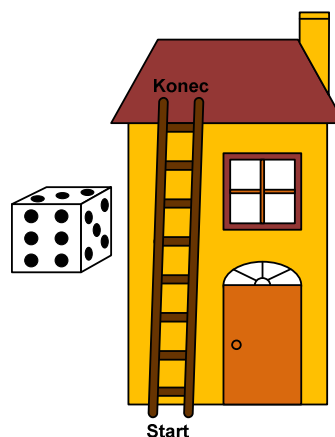
Obr. 2

- a) Simulujte náhodný pokus (na křižovatce A, C hodem mincí, na křižovatce B tažením jednoho ze tří žetonů), že cyklista vyjíždějící z X dojde do Y. Sestavte tabulku a počítejte relativní četnosti.
- b) Pokuste se určit pravděpodobnost náhodného jevu, že cyklista jedoucí z X za podmínek v úloze a) dojde do Y. Porovnejte s výsledky úlohy a).

Výsledek: $\frac{5}{12} \approx 0,417$

Příklad 5 – Žebřík [3]

K okapu střechy vede žebřík s osmi příčkami (obr. 3). Házíme hrací kostkou, pokud padne 1 nebo 6, sestoupíme o jednu příčku (pokud to jde), pokud hodíme 2, 3, 4, 5, postoupíme o jednu příčku. Odhadněte, kolikrát bude třeba hodit, abyste se dostali na osmou příčku žebříku. Pokus opakujte. Vychází vám odhad?



Obr. 3

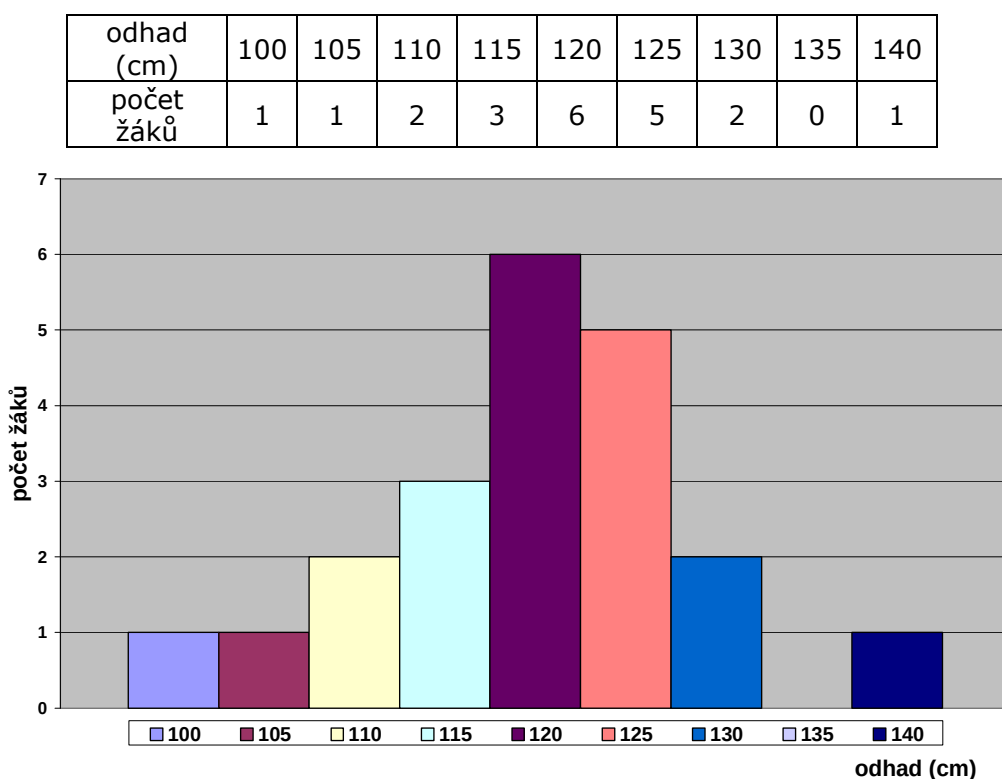
Příklad 6

Hodte dvěma hracími kostkami (72krát) a zaznamenávejte výsledný součet.

- Sestavte tabulku a sloupkový diagram pro počet jednotlivých součtů (od 2 do 12).
- Pokuste se vysvětlit nestejný počet jednotlivých součtů.
- Na základě předchozí úvahy sestrojte sloupkový diagram očekávaných počtů jednotlivých součtů pro tento pokus.

Příklad 7 – Odhad délky provázku [1]

Vyučující krátce ukáže žákům natažený kus provázku, aby žáci odhadli jeho délku s přesností na 5 cm. Pak provázek zapečetí do obálky a uschová. Každý žák odhadne délku provázku, výsledky se zaznamenají, např. do tabulky. Žáci počítají četnosti každé hodnoty, sestojí sloupkový diagram rozložení četností (obr. 4), vypočítají aritmetický průměr a určí nejčastější hodnotu odhadu. Na základě tohoto šetření žáci určí pravděpodobnou délku provázku a pak ji ověří se skutečnou délkou. Pokus může být proveden nezávisle ve více třídách s porovnáním výsledků nebo s odhadem obsahu, objemu i hmotnosti.



Obr. 4

Příklad 8 – Strategie hry se spolužákem

Na stole leží 8 žetonů. Vezměte 1, 2 nebo 3 žetony. Pak udělá totéž spolužák a tak dále. Prohrává ten, kdo si vezme poslední žeton. Nalezněte postup tak, abyste jako začínající vždy vyhráli.

Řešení: První sebere 3, při druhém braní tolik, aby zbyl jeden.

Literatura:

- [1] SOBEL, Max A., MALETSKY, Evan M., *Teaching Mathematics: A Sourcebook of Aids, Activities, and Strategie*. Boston: Allyn and Bacon, 1999.
- [2] HOUSKA, Jan, et al. *Cvičení z matematiky pro I. a II. ročník gymnázií*. Praha: SPN, 1985. 264 s.
- [3] EICHOLZ, Robert E., O'DAFFER, Phares G., FLEENOR, Charles R. *Investigating School Mathematics*. Canada: Addison-Wesley, 1973. 375 s.

7. Diofantovské problémy

Diofantovské problémy (např. diofantovské rovnice) jsou úlohy řešené v oboru celých nebo speciálně přirozených čísel. Název souvisí s řeckým matematikem *Diofantem* (Alexandrie, 3.stol.n. l.), který řešil rovnice a problémy v oboru čísel racionálních.

Jednoduché diofantovské úlohy s reálnou motivací jsou vhodným příkladem pro tematický okruh *Nestandardní úlohy a problémy* vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace podle RVP ZV*. Využívají totiž základní matematický aparát RVP ZV (dělitelnost, proměnné a rovnice, operace s výrazy) a zároveň poskytují žákovi cenný jiný pohled tím, že předpokládají mnohem užší definiční obor a obor hodnot. Diofantovské problémy také poskytují nový pohled na pojem rovnice. Všechny uvedené úlohy se dají řešit konečným počtem zkoušek (tabulkovou metodou), kde se za jednou proměnnou dosazují přirozená (nebo celá) čísla z daného definičního oboru a zkouší se, v kterém případě vyjde také hodnota druhé proměnné přirozené nebo celé číslo z jejího oboru hodnot. Některé úlohy jsou řešeny náročnější metodou – rozkladem na součin, ani tento způsob však nepřesahuje možnosti matematiky ZŠ. Diofantovské úlohy často mají více řešení nebo mohou být neřešitelné.

Mnohé diofantovské úlohy lze řešit již na 1. stupni ZŠ. Známé jsou např. žertovné úlohy typu:

Příklad 1

Na dvoře pobíhaly slepice a prasata, dohromady to bylo 12 noh. Kolik bylo slepic a kolik prasat? (Předpokládáme, že žádnému zvířeti nechyběla nějaká noha.)

Řešení:

Lze provést formou jednoduchého experimentování a sestavením tabulky.

počet slepic	1	2	3	4	5
počet prasat	-	2	-	1	-

Výsledek: Úloha má dvě řešení: 2 slepice a 2 prasata nebo 4 slepice a 1 prase. Kdybychom předpokládali, že jeden ze zmíněných druhů zvířete může chybět, mohli bychom ještě uvažovat o žádné slepici a třech prasatech nebo o šesti slepicích a žádném praseti.

Obrátíme se k poněkud náročnějším úlohám.

Příklad 2

a) Maminka koupila na trhu pomeranče, citrony a kiwi a zaplatila 45 Kč. Přitom jeden pomeranč stál 5 Kč, jeden citron 3 Kč a jedno kiwi 4 Kč. Kolik kusů každého ovoce mohla koupit?

Řešení:

pomeranče	citrony	kiwi
1	4	7
1	8	4
1	12	1
2	1	8
2	5	5
2	9	2
3	2	6
3	6	3
4	3	4
4	7	1

- b) Maminka koupila na trhu pomeranče, citrony a kiwi, celkem 30 kusů a zaplatila 100 Kč. Přitom jeden pomeranč stál 5 Kč, jeden citron 3 Kč a jedno kiwi 4 Kč. Kolik kusů každého druhu ovoce mohla koupit?

Výsledek:

$[p = 4, c = 24, k = 2], [p = 3, c = 23, k = 4], [p = 2, c = 22, k = 6], [p = 1, c = 21, k = 8]$

Příklad 3

Na představení byly zakoupeny dva druhy vstupenek, lacinější po 60 Kč a dražší po 85 Kč. Kolik vstupenek každého druhu bylo zakoupeno, jestliže všechny stály 1 875 Kč?

Řešení:

- a) Úlohu můžeme vyřešit opět tabulkou:

<i>Drahé vstupenky:</i>	1	2	3	4	...	...	...	15	...	...	...	22
<i>Levné vstupenky:</i>	n	n	27	n	n	n	n	10	n	n	n	n

Úloha má dvě řešení – drahých vstupenek 3, levných 27 nebo drahých 15 a levných 10.

- b) Postupovat můžeme také algebraicky.

Označíme-li počet vstupenek levnějších vstupenek x a dražších y , dostaneme rovnici

$$60x + 85y = 1\,875$$

Obě strany rovnice můžeme vydělit pěti

$$12x + 17y = 375$$

Máme najít všechna přirozená čísla x, y , která vyhovují předchozí rovnici. Vypočítáme z rovnice x

$$x = \frac{375 - 17y}{12} = 31 - y + \frac{3 - 5y}{12}$$

Určíme y tak, aby zlomek vpravo měl celočíselnou hodnotu, $y = 3$, pak $x = 27$ nebo $y = 15$, $x = 10$.

Poznámka: Lze dokázat, že všechna řešení dané rovnice v oboru celých čísel můžeme vyjádřit ve tvaru $x = 27 + 17t$, $y = 3 - 12t$, kde t je libovolné celé číslo. Přirozená čísla x, y dostaneme právě pro $t = -1$ a $t = 0$.

Výsledek: Úloha má dvě řešení, bylo zakoupeno 27 levnějších vstupenek a dražší 3 nebo levnějších 10 a dražších 15.

Příklad 4 [1]

Autobusového zájezdu se zúčastní 195 osob. Je možno objednat dva typy autobusů, které mají 42 nebo 36 míst k sezení. Denní poplatek za větší autobus je 6 000 Kč, za menší 5 000 Kč. Kolik větších a kolik menších autobusů je třeba objednat, aby všichni účastníci zájezdu měli místo k sezení a celkové náklady za autobusy byly minimální?

Řešení:

- a) Problém lze řešit tabulkovou metodou.

Označme počet větších autobusů x , počet menších autobusů y , p je počet míst ve všech autobusech ($p - 195$ je počet neobsazených míst), n celkové náklady.

x	0	1	2	3	4	5
y	6	5	4	2	1	0
$p - 195$	21	27	33	3	9	15
n (Kč)	30 000	31 000	32 000	28 000	29 000	30 000

b) Můžeme postupovat algebraicky.

Čísla x , y jsou celá nezáporná čísla. Počet míst p ve všech autobusech je dán výrazem

$$p = 42x + 36y$$

Celkové náklady n v Kč za autobusy jsou určeny vztahem

$$n = 6\,000x + 5\,000y$$

Naším úkolem je nalézt (při minimálním n) taková celá nezáporná čísla x , y , aby platilo $p \geq 195$

neboli $42x + 36y \geq 195$

Obě strany této nerovnice můžeme vydělit třemi, dostaneme

$$14x + 12y \geq 65$$

Dosazováním za x obdržíme výsledky v tabulce.

Závěr: Optimální možnost jsou tři velké a dva malé autobusy. V tomto případě je také minimální počet neobsazených míst.

Také další příklady 6 a 7 můžeme řešit experimentálně zkusmo nebo systematictěji tabulkou. Uvedeno je řešení algebraické.

Příklad 5 – Starověká egyptská úloha

Určete rozměry pravoúhelníku (obdélníku nebo čtverce), pro který platí, že jeho obvod (v daných délkových jednotkách) se rovná číselně obsahu (v odpovídajících jednotkách obsahu).

Řešení:

Označíme-li rozměry obdélníku a , b , dostaneme rovnici

$$a \cdot b = 2a + 2b \quad (1)$$

Tuto rovnici můžeme v oboru přirozených čísel řešit tak, že vypočítáme a , pak dosazováním za přirozených čísel za b hledáme přirozená čísla a .

Druhý způsob je úprava rovnice (1) na tvar

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4$$

$$(a - 2)(b - 2) = 4 = 1 \cdot 4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$$

Porovnáním jednotlivých činitelů dostaneme (až na symetrii) dva výsledky

$$a = 3, b = 6 \quad \text{nebo} \quad a = 4, b = 4.$$

Požadavku úlohy vyhovuje obdélník o rozměrech 3×6 nebo čtverec o rozměrech 4×4 .

Příklad 6

Na upravené trati byl zvýšen počet stanic tak, že se počet variant jízdenek mezi starými a novými stanicemi zvýšil o 46. (Předpokládáme, že z každé výchozí stanice do každé cílové stanice existuje jedna varianta jízdenky.) Kolik stanic měla trať před úpravou a kolik jich po úpravě přibýlo? [2]

Řešení:

Označme počet starých stanic s a počet nových stanic n . Z každé staré stanice do každé nové máme jednu variantu jízdenky neboli celkem $s \cdot n$ různých jízdenek. Z každé nové

stanice máme do všech stanic kromě té zvolené také jednu jízdenku neboli $n + s - 1$, to je celkem n . $(n + s - 1)$ různých jízdenek.

Dostáváme rovnici $s \cdot n + n \cdot (n + s - 1) = 46$

neboli $n \cdot (2s + n - 1) = 46 = 1 \cdot 46 = 2 \cdot 23$

Porovnáním činitelů na levé straně s rozkladu čísla 46 dostaneme dvě řešení v oboru přirozených čísel: $n = 1, s = 23$ nebo $n = 2, s = 11$.

Na trati bylo 23 starých a jedna nová stanice nebo 11 starých a dvě nové stanice.

Příklad 7

Historická úloha – Abú Kámil (850–930 n. l.), Kniha aritmetických kuriozit.

Dostaneš sto drachem a je ti řečeno: Kup za to sto ptáků tří druhů, kachny, holuby a kuřata, kachnu za dvě drachmy, tři holuby za jednu drachmu a dvě kuřata za jednu drachmu. Kolik ptáků každého druhu můžeš koupit?

Řešení:

Označíme-li počet kachen k , počet holubů h a počet kuřat r , dostaneme soustavu dvou rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} k + h + r &= 100, \\ 2k + \frac{h}{3} + \frac{r}{2} &= 100 \end{aligned}$$

Z uvedené soustavy dostaneme

$$h = 60 - \frac{9}{10}r,$$

takže počet kuřat musí být dělitelný deseti. Z toho postupným dosazováním dostaneme šest celočíselných kladných řešení:

$$\begin{array}{cccccc} r = & 10, & 20, & 30, & 40, & 50, & 60, \\ h = & 51, & 42, & 33, & 24, & 15, & 6, \\ k = & 39, & 38, & 37, & 36, & 35, & 34. \end{array}$$

Výsledek: Existuje ještě sedmé nezáporné řešení $r = 0, h = 60, k = 40$, které Abú Kámil neuvažuje.

Příklad 8

Ze závodu se expeduje série 10 000 výrobků stejného druhu v kontejnerech tří velikostí – do menšího kontejneru se vejde 60 výrobků, do prostředního 80 a do největšího 150. Největších kontejnerů je možno použít nejvýše 10. Přitom kontejnerů prostřední velikosti je nedostatek, takže se jich má užít co nejméně. Kolika způsoby lze pomocí zcela naplněných kontejnerů série výrobků odeslat?

Řešení:

Označíme počet menších kontejnerů x , počet prostředních y a počet velkých z . Máme řešit za dané podmínky pro y a z diofantovskou rovnici

$$60x + 80y + 150z = 10\,000$$

Obě strany rovnice vydělíme číslem 10, dostaneme

$$6x + 8y + 15z = 1\,000$$

Vzhledem k podmínce pro y dosadíme $y = 0$, dostaneme rovnici

$$6x + 15z = 1\,000.$$

Tato rovnice však nemá v oboru celých číslech řešení, neboť levá strana je dělitelná číslem 3 a pravá nikoliv.

Dosadíme $y = 1$, dostaneme

$$6x + 15z = 992.$$

Levá strana je opět dělitelná třemi a pravá ne, rovnice nemá v oboru celých čísel řešení.

Zkusíme $y = 2$, dostaneme

$$6x + 15z = 984.$$

Obě strany rovnice vydělíme třemi, dostaneme

$$2x + 5z = 328$$

Najdeme zkusmo jedno řešení této rovnice, např. $x = 4$, $y = 64$. Všechna další řešení v celých číslech jsou dána vzorci $x = 4 + 5t$, $z = 64 - 2t$, kde t je libovolné celé číslo. Vzhledem k tomu, že $0 \leq z \leq 10$, musí být $27 \leq t \leq 32$.

$$t = 27: x = 139, y = 2, z = 10$$

$$t = 28: x = 144, y = 2, z = 8$$

$$t = 29: x = 149, y = 2, z = 6$$

$$t = 30: x = 154, y = 2, z = 4$$

$$t = 31: x = 159, y = 2, z = 2$$

$$t = 32: x = 164, y = 2, z = 0$$

Výsledek: Vyexpedování výrobků může být provedeno šesti způsoby.

Na závěr jednoduchý příklad.

Příklad 9

Máme vyplatit 37 Kč ve dvoukorunových a pětikorunových mincích. Kolika způsoby to lze provést?

Výsledek: Čtyřmi způsoby.

Žertovná úloha o základu číselné soustavy

Na Zemi přiletěli obyvatelé z jiné planety, kteří se vyznačovali tím, že měli na hlavě vždy stejný počet tykadel. Při rozhovoru s jedním z nich vyšlo najevo, že tito mimozemšťané mívají hodně dětí. Dotyčný prohlásil, že má 32 dcer a 44 synů, což je v jejich zápisu čísel 106 dětí. Otázka zní, kolik měl na hlavě tykadel a kolik měl skutečně dětí?

Výsledek: 7 tykadel, 23 dcer a 32 synů.

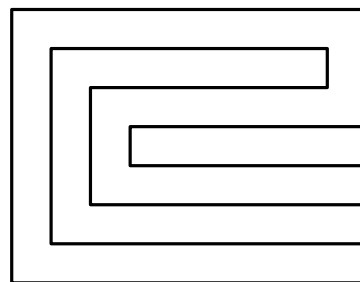
Literatura:

- [1] HOUSKA, Jan, et al. *Cvičení z matematiky pro I. a II. ročník gymnázií*. Praha: SPN, 1985. 264 s.
- [2] NOVOVESKÝ, Š., KŘÍŽALKOVIČ K., LEČKO I. *Zábavná matematika*. Praha: SPN, 1974, str. 25.
- [3] MAČÁK, K. *Tři středověké sbírky matematických úloh*. Praha: Prometheus, 2001, str. 64–65.

8. Délky, obvody, obsahy a objemy

Úloha 1 – Útvar s velkým obvodem a malým obsahem

Určete měření obvod a obsah obrazce na obr. 1. Jeho hranicí je lomená čára, všechny úhly ve vrcholech jsou pravé.



Obr. 1

Úloha 2

Existují tři navzájem neshodné obdélníky s obsahem 12 cm^2 , které mají délky stran vyjádřené v cm celými čísly: $1 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$, $2 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$, $3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$. Určete obsah, pro který bychom získali v obdobné úloze čtyři navzájem neshodné obdélníky.

Výsledek: 24 cm^2

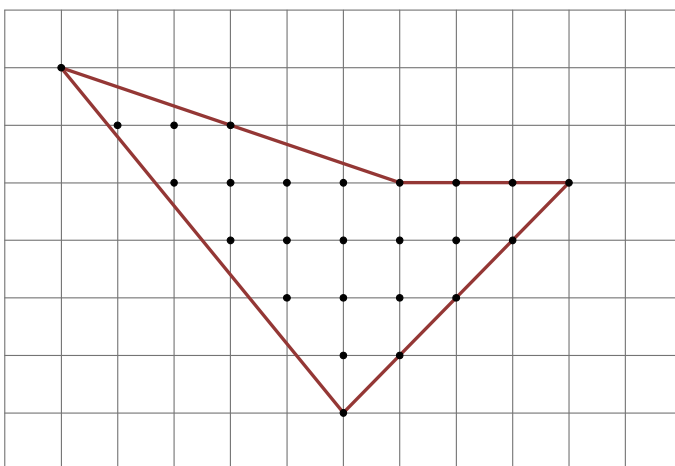
Úloha 3 – Obrazec daného obvodu s největším obsahem

- Obvod obdélníku nebo čtverce (pravoúhelníku) je 36 cm . Sestavte tabulku závislosti obsahu S na délce strany a a odhadněte, v kterém případě bude obsah maximální (největší).
- Určete vzorec a definiční obor funkce z úlohy a). Načrtněte její graf.
- Největší obsah pravoúhelníku při daném obvodu má čtverec. Hádejte, jak by to dopadlo, kdybychom se neomezovali na mnohoúhelníky.

Obvod a obsah útvaru ve čtvercové síti

Úloha 4

Pro obsah S mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech čtvercové sítě platí Pickův vzorec $S = v + \frac{h}{2} - 1$, kde v je počet vrcholů uvnitř mnohoúhelníku, h počet vrcholů na jeho hranici.



Obr. 2

$$\begin{aligned} v &= 15 \\ h &= 10 \\ S &= 19 \end{aligned}$$

$$S = v + \frac{1}{2}h - 1$$

- a) Ověřte Pickův vzorec pro několik mnohoúhelníků (vzorec platí také pro nekonvexní útvary).
 b) Počítejte obvody mnohoúhelníků ve čtvercové síti.

Poznámka: G. Pick působil počátkem 20. století v Praze, později ve Vídni, v Praze byl matematickým kolegou A. Einsteina, zemřel v roce 1942 v Terezíně jako oběť holocaustu.

Úloha 5

- a) Kolik navzájem neshodných úseček s krajními body v mřížových bodech čtvercové sítě existuje v tabulce 4×4 ? Vypočítejte jejich délky.
 b) O kolik více navzájem neshodných úseček s krajními body v mřížových bodech čtvercové sítě než v úloze a) existuje v tabulce 5×5 ?

Výsledek:

- a) 14, délky jsou 1, 2, 3, 4, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$, 5, $4\sqrt{2}$ cm,
 b) o 5, délky jsou $\sqrt{26}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{34}$, $\sqrt{41}$, $5\sqrt{2}$ cm

Úloha 6

V kvádru o rozměrech 1 m, 2 m, 3 m určete počet úseček s krajními body ve vrcholech tělesa, které nejsou navzájem shodné. Určete jejich délky.

Výsledek: 7, délky jsou 1, 2, 3, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$ cm

Úloha 7 – Ekologická havárie

V závodě v místě S poblíž státní hranice došlo k ekologické havárii, její dosah sahá nejvýše 6 km od místa S. Státní hranice poblíž S je přibližně přímočará a tělvis kružnice dosahu zasažené oblasti se státní hranicí má délku rovněž 6 km. Vypočítejte, kolik procent rozlohy pravděpodobně zasažené oblasti spadá na území sousedního státu.

Výsledek: Rozloha zasaženého zahraničního území činí asi 2,9 % celkově ohrožené oblasti.

Úloha 8 – Nebezpečně jednoduchá konstrukce

- a) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|\angle BAC| = 30^\circ$.
 b) Vypočítejte obsah a obvod trojúhelníku ABC.

Výsledek:

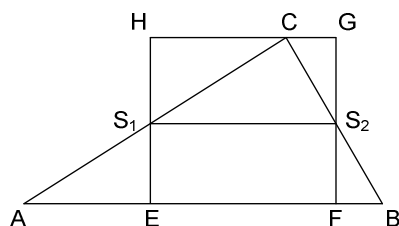
- a) Úloha má dvě navzájem neshodná řešení. Všimněte si, že zadání neodpovídá žádné větě o shodnosti trojúhelníků.
 b) $S_1 = 8\sqrt{3} - 6$, $o_1 = 4\sqrt{3} + 10$, $S_2 = 8\sqrt{3} + 6$, $o_2 = 4\sqrt{3} + 16$

Zdůvodňování vzorců pro obsah obrazce

Důležitým pedagogickým momentem na 2. stupni ZŠ jsou prvky zdůvodňování (deduktivní úvahy). Vhodným příkladem s využitím vět o shodnosti trojúhelníků jsou důkazy ekvivalence různých definic rovnoběžníku (z každé definice plyne jiná): *Rovnoběžník je čtyřúhelník, který má obě dvojice protějších stran shodné. Rovnoběžník je čtyřúhelník, který má obě dvojice protějších stran rovnoběžné. Rovnoběžník je čtyřúhelník, jehož úhlopříčky se půlí.*

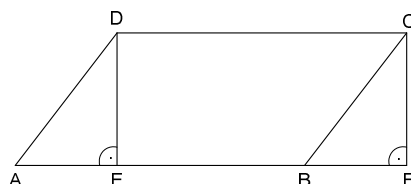
Jiným příkladem je zdůvodňování vzorců pro obsah trojúhelníku, rovnoběžníku a lichoběžníku, známe-li vzorec pro obsah obdélníku. Žáci by měli mít dobré povědomí o těchto důkazech (jejichž princip je patrný z náčrtu), aby si je uměli představit při odvozování příslušných vzorců a dostali tak „pod kůži“, že tyto vzorce „nepadají z nebe“. Vzorec pro obsah trojúhelníku můžeme odvodit dvěma způsoby podle obr. 3. Takový

obrázek je účelné připomenout vždy, když si žák „nemůže na dotyčný vzorec vzpomenout“.



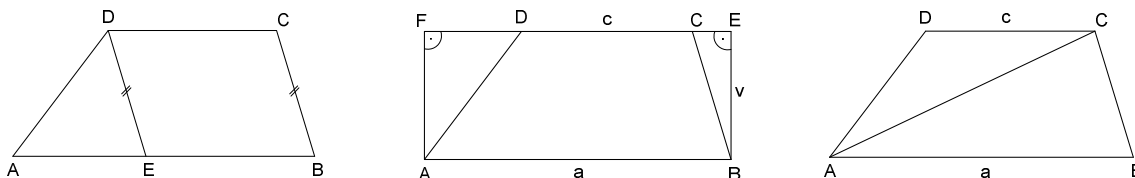
Obr. 3

Podobně je tomu se vzorcem pro obsah rovnoběžníku (obr. 4), důkladnější postup je ovšem pomocí důkazu s využitím shodnosti trojúhelníků (shodné trojúhelníky mají stejné obsahy).



Obr. 4

Nejzajímavější je odvození vzorce pro obsah lichoběžníku, které lze provést mnoha způsoby (obr. 5).



Obr. 5

Důkaz lze provést také pomocí podobnosti doplněním lichoběžníku na trojúhelník a výpočtem rozdílu obsahů dvou trojúhelníků. (Pokud by se ukázalo, že práce s proměnnými a, c, v je příliš náročná, můžeme pracovat s určitými čísly.)

Univerzální vzorec pro objem

Pro objemy známých těles platí vzorec (Simpsonův) $V = \frac{v}{6}(S_1 + 4S_2 + S_3)$, kde S_1 , S_2 , S_3 jsou po řadě obsahy dolní podstavy, středního řezu tělesa a horní podstavy, v je výška tělesa.

Úloha 9

Ověřte Simpsonův vzorec pro kvádr (válec, hranol), čtyřboký pravidelný jehlan (rotační kužel) a pro kouli.

(Simpsonův vzorec platí také pro komolá tělesa i pro kulovou úseč a kulovou vrstvu.)

Úloha 10

Vzorec platí při zřejmé modifikaci také pro rovinné útvary – trojúhelník, rovnoběžník a lichoběžník, naplatí však pro kruh. Ověřte.

(Simpsonův vzorec platí pro každé těleso, jehož obsah řezu kolmého k výšce je kvadratickou funkcí vzdálenosti od podstavy.)

Úloha 11 – Žertovná úloha

Představme si, že Země má přesně tvar koule a okolo rovníku je obepnut drát. Drát prodloužíme o jeden metr a napneme tak, aby byl všude ve stejné výšce od Země. Zjistěte výpočtem, zda by vzniklou mezerou prolezla kočka. (Je známo, že kočka proleze všude, kudy prostrčí hlavu.) Počítejte s délkou zemského poloměru $R = 6380$ km.

Výsledek: $(100 : 2\pi)$ cm, kočka proleze.

Ukažte, že řešení nezávisí na délce poloměru R . Pokuste se vyjádřit zkušenost, která vyplývá z úlohy b).

Úloha 12 – Ověření hodnoty výrazu [1]

Kvádr se čtvercovou podstavou má výšku x cm, podstavná hrana je o 3 cm kratší.

a) Napište výrazy pro objem V a povrch S kváдру jako mnohočleny s proměnnou x .

b) Vypočítejte objem a povrch kváдру pro $x = 5$ cm.

Výsledky ověřte dosazením do mnohočlenů z řešení úlohy a).

Výsledky: a) $V = x^3 - 6x^2 + 9x$, $S = 6x^2 - 24x + 18$

b) $V = 20 \text{ cm}^3$, $S = 48 \text{ cm}^2$

Úloha 13 – Lomená čára v prostoru [1]

Na povrchu kváдру $ABCDEFGH$, $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|CG| = 5$ cm, je narýsována uzavřená lomená čára $ACFDHA$. Vypočítejte její délku.

Výsledek: $10 + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{41}$ cm = 29,9 cm

Úloha 14 – Poloha letiště [1]

Pro čtyři města A, B, C, D má být zvolena poloha L letiště (rozvodny el. sítě) tak, aby součet vzdáleností $|AL| + |BL| + |CL| + |DL|$ byl minimální.

Určete bod L za předpokladu, že

a) $ABCD$ je vypuklý (konvexní) čtyřúhelník

b) $ABCD$ je nekonvexní čtyřúhelník s vypuklým vnitřním úhlem při vrcholu C

Řešení:

a) bod L je průsečík úhlopříček AC a BD , pro každý jiný bod provedeme důkaz užitím trojúhelníkové nerovnosti

b) $L = C$

Poznámka. Pro tři body A, B, C v rovině je úloha obtížnější. Bodem L takovým, že $|AL| + |BL| + |CL|$ je minimální, je tzv. *Fermatův bod*, v ostroúhlém trojúhelníku ABC je z bodu L vidět úsečky AB, BC, AC pod úhlem 120° .

Úloha 15 – Poloha motorestu (policejní stanice) [1]

Pro tři přímočaré silnice s křižovatkami A, B, C má být určena poloha P motorestu (stanice) tak, aby součet vzdáleností $|A, \leftrightarrow B| + |B, \leftrightarrow C| + |C, \leftrightarrow A|$ byl minimální za předpokladu, že trojúhelník ABC je

a) trojúhelník s navzájem neshodnými stranami

b) rovnostranný

c) rovnoramenný

Řešení:

- bod P je vrcholem trojúhelníku ABC s největším vnitřním úhlem
- bodem P je kterýkoliv bod uvnitř nebo na hranici trojúhelníku ABC (porovnáním součtu obsahů trojúhelníků ABP , ACP , BCP s obsahem trojúhelníku ABC dostaneme, že součet vzdáleností každého takového bodu od stran trojúhelníku ABC se rovná jeho výšce)
- pokud jsou shodné vnitřní úhly trojúhelníku ABC větší než zbývající třetí vnitřní úhel, bodem P může být každý z obou vrcholů náležících k těmto shodným úhlům trojúhelníku ABC , v opačném případě je to hlavní vrchol

Úloha 16 – Přejezd přes poušť

Automobil má přejet co největší vzdálenost v poušti, uveze však zásobu benzínu pouze na 300 km. Čerpat další palivo lze v místě startu S , může však část nákladu benzínu uložit v založeném skladu a využít zásobu pro další jízdu. Určete maximální vzdálenost, kterou automobil ujede při založení

- jednoho skladu P
- dvou skladů P_1, P_2

Jakou část ze zásoby paliva načerpaného v S uloží v každém skladu? Určete vzdálenost skladů od místa startu S .

Řešení:

- 400 km, $\frac{1}{3}$ v P , $|SP| = 100$ km,
- 460 km, $\frac{3}{5}$ v P_1 , $|SP_1| = 60$ km, $\frac{1}{3}$ v P_2 , $|SP_2| = 160$ km.

Literatura:

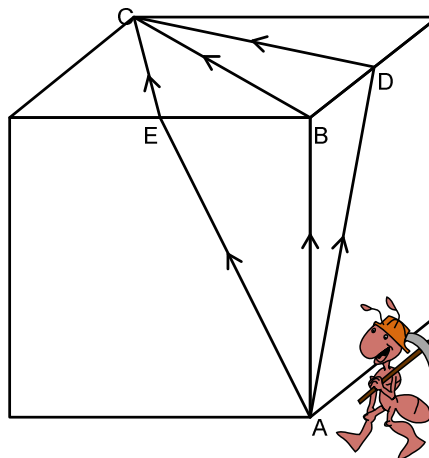
- [1] NIVEN, I. *Maxima and Minima Without Calculus*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America, 1981.
- [2] DUKOWSKI, I., SCROGGIE, G. *Mathematics 8*. Canada: Houghton Mifflin, 1985, 290 s.
- [3] WILCOCK, D. *Mathematics teacher: Start the Year Right – Discover Pick's Theorem*. Washington, D. C. Mathematical Association of America, 1981.
- [4] VASILJEV, N. B. Vokrug formuly Pika. *Kvant*. 1974, č. 12, s. 39–43.

9. Prostorové úlohy

Úloha 1 – Mravenec na krychli

Mravenec leze po povrchu krychle z bodu A do bodu C (obr. 1). Určete nejkratší dráhu mravence. Počítejte délku vyznačených cest pro délku hrany krychle je 1 m.

Výsledek: Otočením horní stěny do roviny přední stěny vidíme správné řešení ihned, nejkratší dráha je AEC nebo ADC , její délka je $\sqrt{5}$ m, délka cesty ABC je $(1 + \sqrt{2})$ m.



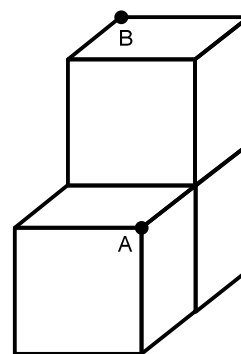
Obr. 1

Úloha 2

Na obr. 2 jsou narysované tři shodné krychle (délka hrany je 1 m). Určete nejkratší dráhu po povrchu tělesa z bodu A do bodu B.

Počítejte pomocí Pythagorovy věty několik délek cest a odhadněte nebo zdůvodněte optimální.

Výsledek: Nejkratší cesta z A do B je $\sqrt{10}$ m.

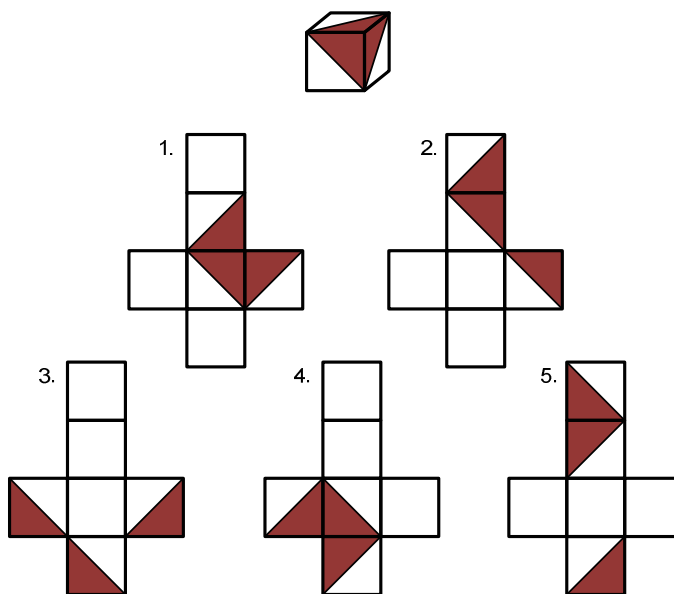


Obr. 2

Úloha 3 – Síť krychle [1]

Na obr. 3 je narysována krychle s jedním vybarveným vrcholem a několik sítí krychle. Určete, která ze sítí může vzniknout z narysované krychle.

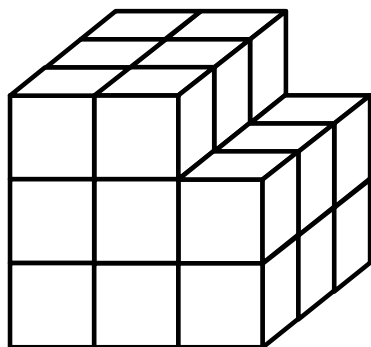
Výsledek: 1, 2, 4.



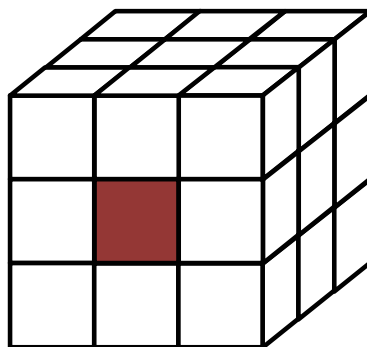
Obr. 3

Úloha 4 – Obarvená krychle

- a) Obarvenou krychli rozřežeme na $3 \times 3 \times 3$ krychliček. Kolik krychliček bude mít obarvenu jednu, dvě, tři stěny? Kolik krychliček nebude mít obarvenu žádnou stěnu?
Výsledek: 6, 12, 8, 1.
- b) Obarvenou krychli rozřežeme na $4 \times 4 \times 4$ krychliček. Kolik krychliček bude mít obarvenu jednu, dvě, tři stěny? Kolik krychliček nebude mít obarvenu žádnou stěnu?
Výsledek: 24, 24, 8, 8.
- c) Z krychle rozřezané na $3 \times 3 \times 3$ krychliček je vyňata v jedné hraně řada tří krychliček (obr. 4), zbylé těleso je na povrchu obarveno. Kolik krychliček má obarvenu jednu, dvě, tři, žádnou stěnu?
Výsledek: 4, 9, 10, 1.
- d) Z krychle rozřezané na $3 \times 3 \times 3$ krychliček byl vyňat středem dvou protějších stěn "tunel" ze tří krychliček (obr. 5). Kolik krychliček po obarvení tělesa má obarvenu jednu, dvě, tři, žádnou stěnu?
Výsledek: 0, 8, 16, 0.



Obr. 4



Obr. 5

Úloha 5

Vrcholy krychle jsou označeny čísly 1 až 8. Navrhněte takové umístění těchto čísel ve vrcholech krychle, aby součet byl v každé stěně stejný.

Výsledek: Při obvyklém značení vrcholů např. A (1), B (4), C (5), D (8), E (6), F (7), G (2), H (3).

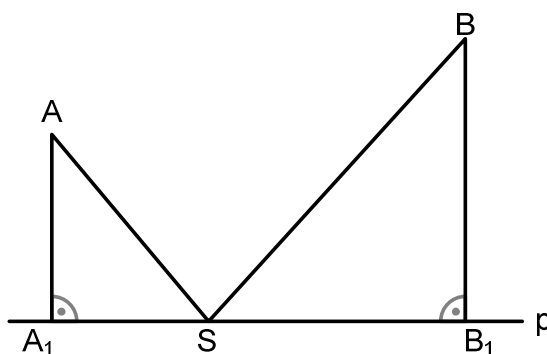
Literatura:

- [1] SOBEL, Max A., MALETSKY, Evan M., HILL, Thomas J. *Essentials of Mathematics 2*. Canada: Ginn and Company, 1974. 454 s.
- [2] HOUSKA, Jan, et al. *Cvičení z matematiky pro I. a II. ročník gymnázií*. Praha: SPN, 1985. 264 s.

10. Matematický experiment

Příklad 1 – Problém čerpací stanice

Na jedné straně přímé dálnice (přímka p) leží dvě obce (body A, B), $|Ap| = 2$ km, $|Bp| = 3$ km, body A_1 a B_1 jsou po řadě paty kolmic vedených z bodů A, B k přímce p , $|A_1B_1| = 4$ km. Určete místo na dálnici, kde má být čerpací stanice pohonných hmot (bod S) tak, aby $|AS| + |BS|$ byla co nejmenší (obr. 1).



Obr. 1

- a) Úlohu řešte experimentálně dělením úsečky A_1B_1 po 0, 5 km.
b) Zvolte vhodné měřítko a řešte úlohu geometrickou konstrukcí a výpočtem.

Řešení:

- a) experimentálně (v km)

$ A_1S $	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$ B_1S $	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	0
$ AS $	2,00	2,06	2,24	2,50	2,82	3,20	3,60	4,03	4,47
$ BS $	5,00	4,61	4,24	3,90	3,60	3,35	3,16	3,04	3,00
$ AS + BS $	7,00	6,67	6,48	6,40	6,42	6,55	6,76	7,07	7,47

Minimální $|AS| + |BS|$ dostaneme pro $|A_1S| = 1,5$ km.

- b) Řešení geometrickou konstrukcí a výpočtem.

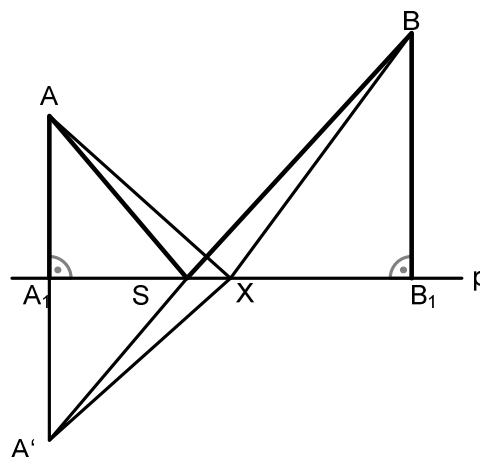
Rozbor: Sestrojíme-li bod A' souměrně sdružený s bodem A podle přímky p , pak $|A'S| = |AS|$, takže $|AS| + |BS| = |A'S| + |BS|$

Konstrukce

1. A', A' je obrazem bodu A v osové souměrnosti podle p
2. $A'B$
3. $S = p \cap A'B$

Důkaz

Zvolíme-li na p jiný bod X než S , platí
 $|AX| + |BX| = |A'X| + |BX| > |A'S|$
 (trojúhelníková nerovnost)



Obr. 2

Výpočet:

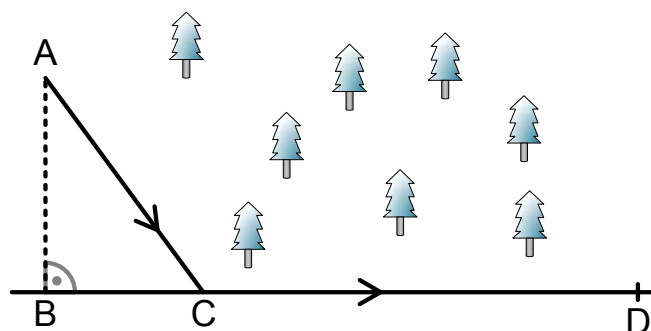
$$\triangle AA_1S \quad \triangle A'A_1S \text{ (sus)} \quad \triangle AA_1S \approx \triangle BB_1S \text{ (uu)} \Rightarrow \frac{|A_1S|}{|AA_1|} = \frac{|B_1S|}{|BB_1|}$$

$$|A_1S| = x, \frac{x}{2} = \frac{4-x}{3} \Rightarrow x = 1,6$$

Optimální poloha čerpací stanice je 1,6 km od bodu A_1 .

Příklad 2 – Problém cyklisty

Tomáš jede domů na trekingovém kole nejdříve terénem a potom po cyklistické stezce (obr. 3). Pohybuje se z místa A do místa D . V terénu jede průměrnou rychlostí 8 km/h a po cyklistické stezce rychlostí 17 km/h. Vzdálenost bodu A od cyklistické cesty $|AB| = 1,2$ km, $|BD| = 2$ km. Předpokládáme, že se pohybuje v terénu i po stezce přibližně přímočaře. Určete místo příjezdu na stezku C tak, aby celková doba jízdy cyklisty byla minimální.



Obr. 3

Řešení:

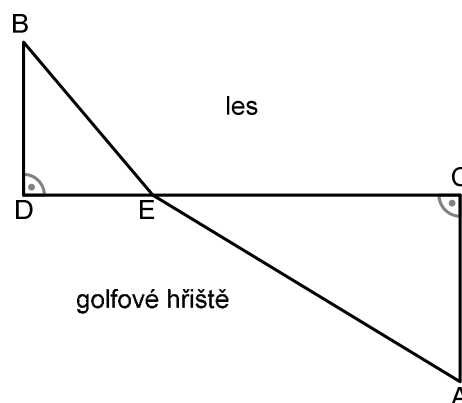
Celková doba jízdy je $\left(\frac{|AC|}{8} + \frac{|CD|}{17}\right)$

hodin. Vyjádříme tuto dobu pomocí $x = |BC|$ v minutách. Minimální dobu budeme hledat experimentálně tak, že budeme volit $x = 200, 400, \dots, 1800$ metrů. Minimální čas je mezi 600 m a 800 m. Budeme dělit tento interval, délka pro minimální čas je 640 m a časové minimum je 15 minut.

Příklad 3 – Markova nejkratší cesta

Marek běží z místa A přes golfové hřiště do chaty B , která je v lese. Golfové hřiště je odděleno od lesního porostu přímou cyklistickou stezkou CD (obr. 4). Marek se pohybuje v obou terénech přibližně přímočaře. Na hřišti rychlostí 200 m/min. a v lese rychlostí 100 m/min.

$|AC| = 800$ m, $|BD| = 600$ m, $|CD| = 1\,000$ m. Určete bod E na stezce, kde by se měla Markova cesta v ideálním případě „zlomit“ tak, aby doběhl z A do B v co nejkratším čase.



Obr. 4

Řešení:

Postupujeme experimentálně. Rozdělíme úsečku CD po 100 m, volíme $x = |CE|$ a počítáme $|AE|$ a $|BE|$, časy $t_1, t_2, t_1 + t_2$ v minutách (desetinných číslech). Sestavíme tabulku. Podezřelý interval rozdělíme jemněji (po 10 m).

Výsledek: Optimální cesta Marka z hlediska času je lomená čára AEB , $|CE| \approx 775$ m, čas je asi 12 minut.

Příklad 4 – Krabice s největším objemem

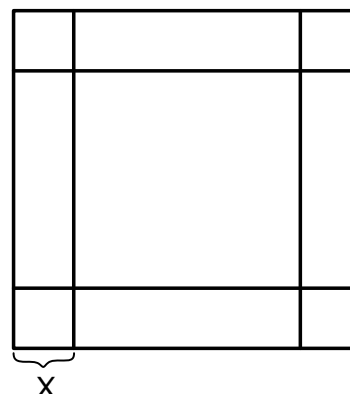
Z tvrdého papíru tvaru čtverce o straně 60 cm máme vyříznout ve vrcholech menší čtverce tak, aby přehnutím vznikla krabice bez víka. Určete délku strany vystřihovaných čtverců tak, aby objem krabice byl co největší. (Obr. 5)

Řešení:

Označíme délku strany vystřihovaných čtverců x (cm), pak pro objem V krabice dostaneme $V = (60 - 2x)^2 \cdot x$ (cm³).

Sestavíme tabulku pro x a V , x volíme po 5 cm.

Maximum V dostaneme pro $x = 10$, vyzkoušíme ještě $x = 9$ a $x = 11$. Vidíme, že maximum V je patrně pro $x = 10$.



Obr. 5

Výsledek: Aby byl objem krabice co největší, je třeba vystřihnout čtverce 10×10 cm², maximální objem je 16 dm³.

**Příklad 5 – Kreslete a počítejte!**

Největší počet oblastí p , na něž rozdělují kruh tětivy spojující n bodů na hranici tohoto kruhu, je dán výrazem

$$p = 1 + \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

- Ověřte toto tvrzení (graficky a podle vzorce) pro $n = 2, 3, 4, 5$. **Výsledky:** 2, 4, 8, 16.
- Pokuste se uhádnout (vyslovit hypotézu) počet těchto oblastí pro $n = 6$. Potom výsledek ověřte. Vychází vám odhad? Všimněte si, že výsledek pro $n = 6$ **neodpovídá** očekávanému vzoru mocninám dvou (tedy $2^5 = 32$) jako pro $n = 2, 3, 4, 5$.

Výsledek: 31

- Zjistěte pomocí vzorce počet těchto oblastí pro $n = 7$.

Výsledek: 57

**Příklad 6 – Kreslete a počítejte!**

Konvexní n -úhelník je rozdělen svými úhlopříčkami nejvýše na $\frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)$ oblastí.

- Ověřte toto tvrzení pro $n = 3, 4, 5, 6$

Výsledky: 1, 4, 11, 25

- Tvrzení souvisí s příkladem 5. Pokuste se to vysvětlit a odvodit přecházející výraz ze vzorce z příkladu 5.

Návod: Odečtěte od výrazu pro p z příkladu 5 počet oblastí n (proč?) a převedte na společného jmenovatele, vhodným výtýkáním dostanete výraz z příkladu 6.

Literatura:

- [1] KELLY, B., ALEXANDER, B., ATKISON, P., WARNICA, E. *Mathematics 9*. Canada: Addison-Wesley, 1981. 438 s.

Proč se nedá dělit nulou (metodická poznámka)

Pokyn, že se nesmí dělit nulou se často objevuje v pedagogické praxi na 2. stupni ZŠ a využívá se v algebře při určování podmínek, za nichž nemá lomený výraz s proměnnými ve jmenovateli smysl. Někdy se s ním setkáváme již na 1. stupni, tam

však problematika násobení a dělení nulou podle našeho názoru nepatří, nutně však tato otázka vystoupí na 2. stupni při operacích s celými čísly. Méně často se zároveň uvádí důvod, proč nelze nulou dělit, jak by si vskutku pedagogický postup vyžadoval. Přitom existuje několik možností, které dobře vysvětlují, proč nelze dělit nulou, a jsou zcela v dosahu žáků 2. stupně ZŠ. Z metodického hlediska si nepochybně zasluhuje tento problém větší pozornost, svědčí o tom i občasné dotazy rodičů a širší veřejnosti. Zdůvodnění by mělo být zařazeno do výstupů ŠVP z matematiky v rámci RVP ZV na 2. stupni, a tím spíše na nižším gymnáziu. Uvedeme tři důvody.

Důvod logický. Máme-li spravedlivě rozdělit 6 bonbonů mezi 3 děti, dělíme $6 : 3 = 2$, máme-li „rozdělit“ 6 bonbonů jednomu dítěti, dostane všechny. Pokud však máme dělit 6 bonbonů a nemám žádné dítě (tedy 0 dětí), z logiky situace dělení neprovádíme, úloha nemá smysl.

Důvod aritmetický. Jestliže $6 : 3 = 2$, pak $2 \cdot 3 = 6$ a obráceně. Jestliže $6 : 0 = x$, pak $x \cdot 0 = 6$, ale $x \cdot 0$ je pro každé číslo 0 („nic krát cokoliv je vždy nic“), zkouška nevyšla, x není žádné číslo.

Důvod z hlediska průběhu funkce. Uvažujme funkci nepřímou úměrnost určenou vztahem $y = 6/x$, jejím grafem je rovnoosá hyperbola, jejími asymptotami jsou osy soustavy souřadnic. Blížíme-li se po ose x zprava k nule, např. pro $x = 1; 0,5; 0,1; 0,001; 0,001; \dots$; jsou odpovídající hodnoty $y = 6, 12, 60, 600, 6\,000, \dots$. Graf nepřímé úměrnosti neprotne nikde osu y . Říkáme: „Když se x blíží k nule zprava, roste $y = 1/x$ nad všechny meze.“ Podobně když x se blíží k nule zleva (po záporné poloose x), klesá y dotýčné funkce pod všechny meze. Někdy se také říká, že limit (ne hodnota) funkce $y = 6/x$ „když x se blíží k nule zprava, je plus nekonečno“ – zápis $\lim_{x \rightarrow 0^+} 6/x = +\infty$, podobně při

přibližování zleva $\lim_{x \rightarrow 0^-} 6/x = -\infty$.

„Nekonečno“ ovšem není žádné číslo.

Poznámka

Poněkud zvláštní případ je „neurčitý výraz $0/0$ “. Ukážeme to na výrazech $\frac{ax}{x}, \frac{x^2}{x}, \frac{x}{x^2}$.

Pokud bychom se snažili určit hodnotu $0/0$ opět přibližováním čitatele a jmenovatele k nule, dostaneme po zkrácení v prvním případě číslo a , tedy libovolné číslo, ve druhém nulu a ve třetím výše uvedený případ nepřímé úměrnosti – růst nad všechny meze nebo pokles pod všechny meze podle toho, jestli se přibližujeme zprava nebo zleva. Uvedené neurčité výrazy, které reprezentují při přibližování proměnné x k nule výraz $0/0$, se vskutku „chovají všelijak“ (podle toho jakou funkci máme v čitateli a ve jmenovateli), výrazu $0/0$ nelze jednoznačně přiřadit žádné určité číslo.

Uvedené důvody vysvětlují, proč „podíl s nulovým jmenovatelem“ včetně „výrazu nula děleno nulou“ nemají smysl (výsledek takové operace neexistuje) a s přihlédnutím ke konkrétní situaci ve třídě by měly být využity při práci s žáky.

11. Eulerova věta a mnohostěny

Námět uvádí zajímavý stereometrický vztah, který odhaluje žákům nečekané souvislosti v matematice, které zůstávají zatím za jejich obzorem. Takový motiv podporuje kompetenci k učení (zvědavost) a k řešení matematických problémů, ukazuje na hlubší propojení jednotlivých tematických oblastí nebo jejich aplikaci (využití diofantovských metod ve studiu pravidelných těles), poukazuje na meze platnosti matematického faktu, které jsou určeny omezujícími podmínkami.

Pro konvexní hranatá tělesa (mnohostěny) platí Eulerova věta o mnohostěnech: **Součet počtu vrcholů a stěn konvexního mnohostěnu se rovná počtu hran zvětšenému o dva.** Označíme-li počet vrcholů v , počet stěn s a počet hran h , pro každý konvexní mnohostěn platí $v + s = h + 2$ (1)
Eulerovu větu nebudeme dokazovat, pouze ji ověříme na několika případech.

Ověřte vztah (1) pro kvádr a čtyřstěn! Ověřte vztah (1) pro pětiboký konvexní hranol a pětiboký konvexní jehlan!

Příklad 1

Ověřte vztah (1) a) pro n -boký konvexní hranol, b) pro n -boký konvexní jehlan.

Řešení:

a) Pro n -boký konvexní hranol

$$v = 2n, \quad s = n + 2, \quad h = 3n$$

Dosazením do (1) ověříme, že vztah (1) platí.

b) Pro n -boký konvexní jehlan

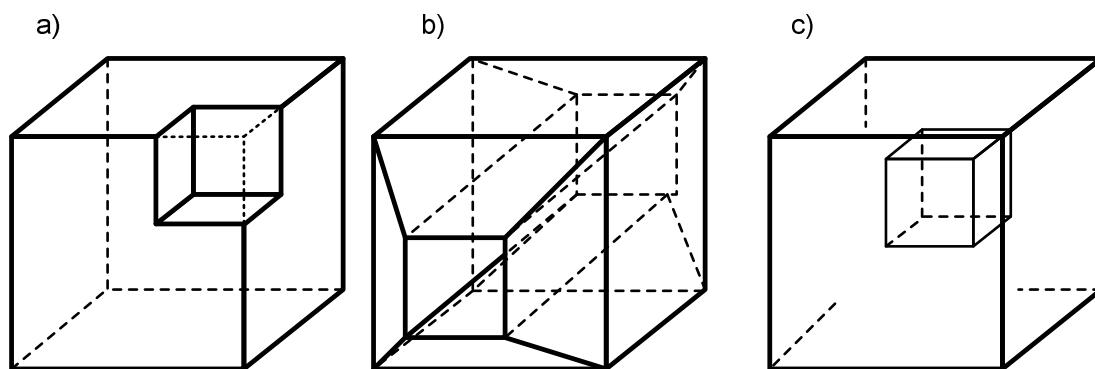
$$v = n + 1, \quad s = n + 1, \quad h = 2n$$

Dosazením do (1) opět ověříme, že vztah (1) platí.

Pro mnohostěny, které nejsou konvexní (mají dutinu), vztah (1) platit nemusí.

Příklad 2 [1]

Zjistěte, pro které z nekonvexních těles na obr. 1 a), b), c) vztah (1) platí nebo neplatí.



Obr. 1

Na obr.1a) je zobrazena krychle, v jejímž jednom vrcholu je vyřazena menší krychle.

Na obr.1b) je zobrazeno těleso původně složené z krychle a dvou jehlanů, pak v ose tělesa určené hlavními vrcholy byl vyříznut kvádr se čtvercovou podstavou.

Na obr.1c) je znázorněna krychle, v níž je dutina tvaru menší krychle.

Řešení:

a) Pro těleso na obr. 1a) platí

$$h = 21, \quad v = 14, \quad s = 9, \quad \text{takže vztah (1) platí.}$$

b) Pro těleso na obr.1b) platí

- $h = 32, v = 16, s = 16,$ takže vztah (1) neplatí.
 c) Pro těleso na obr. 1 c) platí
 $h = 24, v = 16, s = 12,$ takže vztah (1) neplatí.



Pravidelné mnohostěny

Vrátíme se ke konvexním mnohostěnům, pro ty vztah (1) platí. Budeme se zabývat pravidelnými mnohostěny. **Pravidelný mnohostěn je konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a každým vrcholem prochází stejný počet hran.** Příkladem pravidelného mnohostěnu je krychle nebo pravidelný čtyřstěn. Nabízí se otázka, které typy pravidelných mnohostěnů ještě existují. Na první pohled by se mohlo zdát, že existují pravidelné mnohostěny s libovolným počtem stěn obdobně, jako je to s pravidelnými mnohoúhelníky, které existují pro libovolný počet stran (větší než 2). Zde však analogie mezi geometrií v prostoru a v rovině selhává, počet typů pravidelných mnohostěnů je značně omezen.

Přesnou odpověď na naši otázku dostaneme užitím vztahu (1). Jestliže stěnou pravidelného mnohostěnu je n -úhelník ($n \geq 3$) a každým vrcholem prochází m hran ($m \geq 3$), pak platí $v \cdot m = 2h, s \cdot n = 2h,$ (2)

odkud vyloučením v, s a dosazením do (1) po úpravě dostaneme

$$h \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right) = 1 \quad (3)$$

Protože číslo h je kladné, musí být také činitel v závorce kladný neboli

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \quad (4)$$

To je vlastně diofantovská nerovnice, která má za daných podmínek právě pět řešení.

- a) $m = 3, n = 3$
- b) $m = 4, n = 3$
- c) $m = 3, n = 4,$
- d) $m = 5, n = 3$
- e) $m = 3, n = 5$

Postupným dosazením těchto čísel do (3) a (2) dostaneme

- a) $h = 6, v = 4 \quad s = 4$
- b) $h = 12, v = 6 \quad s = 8$
- c) $h = 12, v = 8 \quad s = 6$
- d) $h = 30, v = 12, \quad s = 20$
- e) $h = 30, v = 20, \quad s = 12$

V případech a) a c) dostáváme známá tělesa – pravidelný čtyřstěn a krychli. Případy b), d), e) ukazují, že by měly existovat pravidelné osmistěny a dvacetistěny s trojúhelníkovými stěnami a pravidelné dvanáctistěny se stěnami tvaru pravidelného pětiúhelníku. Tato tělesa se vskutku dají sestavit, takže existuje pět typů pravidelných mnohostěnů podle výsledku řešení nerovnice (4).

Poznámka. Uvedené výsledky lze dostat také úvahou o součtu velikosti úhlů při vrcholu pravidelného mnohostěnu, který musí být menší než 360° . Při zavedeném značení totiž

musí platit $m \frac{n-2}{n} \cdot 180 < 360$. To je nerovnice ekvivalentní s (4).

Historická poznámka

Všechny pravidelné mnohostěny byly známy již ve starověkém Řecku. Řecký filozof Platón (429 – 348 před n. l.) je symbolicky připisoval čtyřem základním živlům: ohni – pravidelný čtyřstěn, vzduchu – pravidelný osmistěn, zemi – krychli, vodě –

pravidelný dvacetistěn a celému vesmíru – pravidelný dvanáctistěn. Podle Platóna se pravidelné mnohostěny někdy nazývají platónskými tělesy.

Leonhard Euler (1707 – 1783), po němž se nazývá vztah (1), je jedním z nejvýznamnějších matematiků novověku. Pocházel ze švýcarské Basileje, většinu svého života však strávil v Berlíně a v Petrohradě, kde pracoval v tamější akademii věd, v Petrohradě je také pochován. V matematice se s jeho jménem setkáváme na každém kroku.

Některé problémy, které řešil, jsou mezi uvedenými úlohami. Poznamenejme, že vztah (1) znal matematik a filozof René Descartes (1596 – 1650) a před ním již starověký Archimédes (287 – 212 před n. l.), který vyšetřoval tzv. polopravidelná tělesa.

Další úlohy:

1. Zobrazte krychli s hranou délky 1 dm. Středů stěn krychle jsou vrcholy tělesa. Zobrazte toto těleso a dokažte, že je to pravidelný osmistěn. Ověřte, že pro toto těleso platí vztah (1).
2. Odvoďte vzorec pro objem a povrch pravidelného osmistěnu s hranou velikosti a .

$$V = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}, S = 2a^2\sqrt{3}$$
3. Těleso vzniklo slepením dvou shodných pravidelných čtyřstěnů v jedné stěně.
 - a) Dokažte, že toto těleso není pravidelný mnohostěn.
 - b) Ověřte, že pro toto těleso platí vztah (1).
4. a) Zobrazte konvexní mnohostěn, jehož vrcholy jsou všechny středy hran krychle (hrana krychle má délku 1 dm).
 b) Ověřte platnost vztahu (1) pro toto těleso.
 c) Vypočítejte objem a povrch tohoto tělesa. $(\frac{5}{6} \text{ dm}^3, (3 + \sqrt{3}) \text{ dm}^2)$.
5. a) Zobrazte konvexní mnohostěn, jehož vrcholy jsou všechny body hran krychle, které dělí tyto hrany na třetiny (délka hrany krychle 1 dm).
 b) Vypočítejte objem tohoto mnohostěnu. $\frac{77}{81} \text{ dm}^3$
6. Číslo $e = v + s - h$, kde v je počet vrcholů, s je počet stěn a h je počet hran mnohostěnu, se nazývá Eulerova charakteristika mnohostěnu.
 - a) Určete e pro libovolný konvexní mnohostěn. (2)
 - b) Určete e pro mnohostěny z příkladu 2. (2, 0, 4)
7. Uvažujte těleso, které vzniklo „slepením“ dvou shodných čtyřstěnů ve společné stěně.
 - a) Vysvětlete, proč toto těleso není pravidelný mnohostěn.
 - b) Ověřte, že pro toto těleso platí Eulerova věta.

Literatura:

- [1] HOUSKA, J., et al. *Cvičení z matematiky pro I. a II. ročník gymnázií*. Praha: SPN, 1985. 264 s.

12. Shodné útvary a souměrnosti

Ve školské geometrii se žáci setkávají s osovou souměrností případně i středovou souměrností již na 1. stupni. Na 2. stupni tyto dva typy shodných zobrazení jsou předmětem hlubšího studia. Pomocí zajímavých úloh zaměřených na poznávání dalších typů shodných zobrazení, jakými jsou posunutí a otáčení, je možné u žáků rozvíjet nejenom geometrickou představivost, ale i grafický projev žáků a nenásilným způsobem v nich vzbuzovat touhu po dalším poznávání zajímavé oblasti matematiky – geometrie.

Úloha 1: Dokresli tabulku otočených písmen a číslic. [1]

VZOR	OBRAZ			
	otočení o $\frac{1}{4}$ kružnice	otočení o $\frac{1}{2}$ kružnice	otočení o $\frac{3}{4}$ kružnice	otočení o celou kružnici
K				
7				
Y				
5				

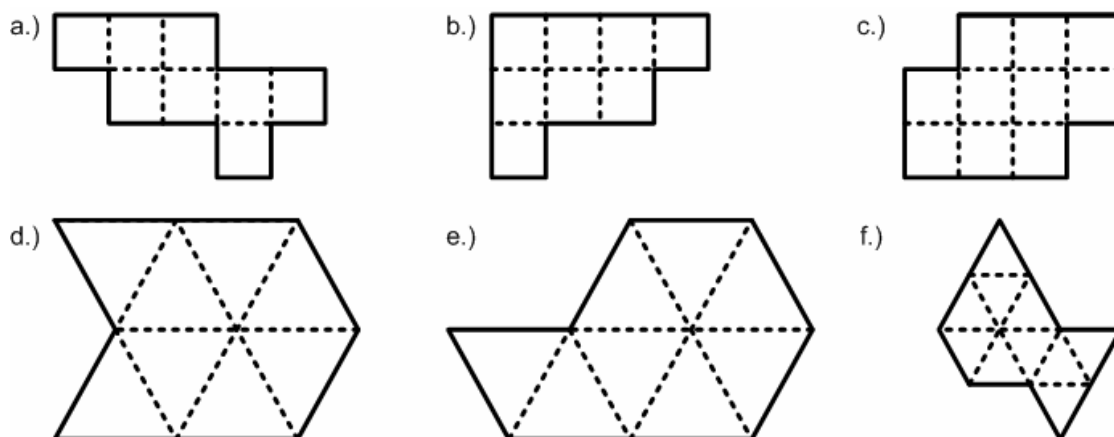
Úloha 2: Dokresli tabulku písmen zobrazených podle dané osy. [1]

PÍSMENO	vertikální osa	horizontální osa	šikmá osa
F			
R			
H			
S			

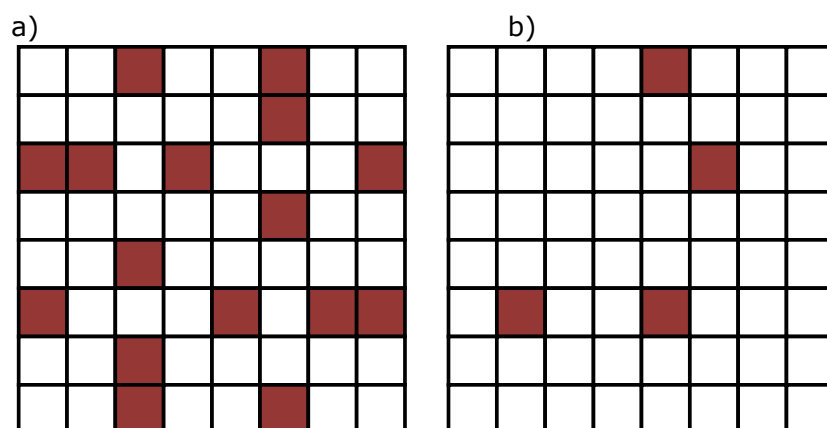
Úloha 3: Urči zobrazení, které převádí černé písmeno do oranžového. [1]



Úloha 4: Rozděl útvar na dvě shodné části podle čárkovaných linek a urči zobrazení, které převádí jednu část v druhou. [1]



Úloha 5: Určete otočení, kterým se nezmění vybarvená šachovnice a). [1]



Výsledek: Otočení kolem středu šachovnice o $\frac{1}{4}$ kružnice.

Úloha 6: Vybarvi druhou šachovnici (b) tak, aby při otočení kolem středu o 180° se nezměnila. [1]

Úloha 7: Urči počet os souměrnosti, příp. střed souměrnosti daných útvarů:
čtverec obdélník kosočtverec kosodélník

rovnoramenný trojúhelník rovnostranný trojúhelník pravidelný pětiúhelník
 kruh elipsa deltoid.
 Výsledek: Osy souměrnosti po řadě: 4, 2, 2, 0, 1, 3, 5, nekonečno, 2, 1
 Střed souměrnosti – čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník, kruh, elipsa

Úloha 8: Určuj osovou (O) a středovou (S) souměrnost velkých tiskacích písmen a číslic:

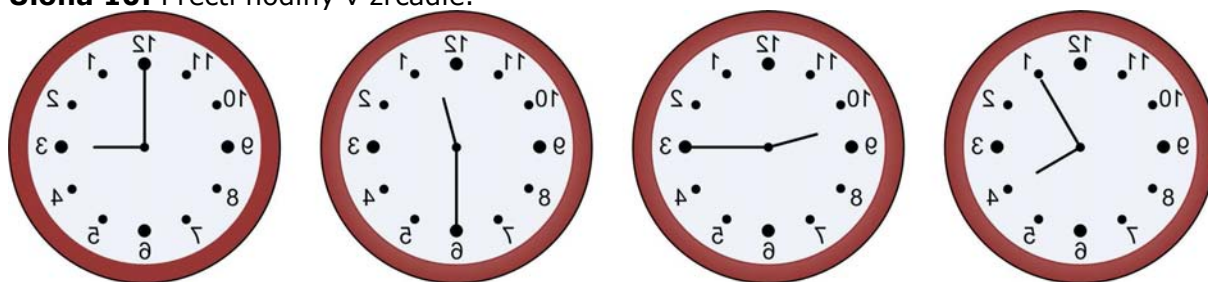
H 8 T O E S Z 3

Výsledek: **H** (O, S), **8** (O, S), **T** (O), **E** (O), **S** (S), **Z** (S), **3** (O)

Úloha 9: Nakresli útvar, který je středově souměrný, ale není osově souměrný.

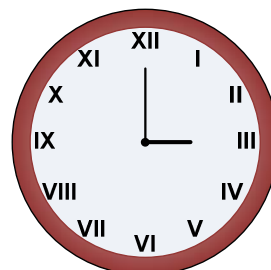
Výsledek: Např. kosodélník nebo S nebo Z.

Úloha 10: Přečti hodiny v zrcadle.



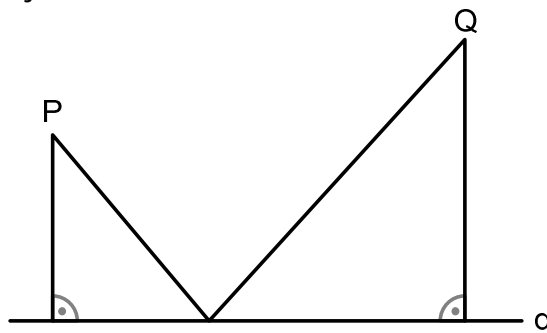
Výsledek: a) tři hodiny, b) půl jedné, c) čtvrt na deset, d) čtyři hodiny a pět minut.

Úloha 11: Nakresli ciferník s římskými číslicemi v zrcadle.



Aplikace osové souměrnosti

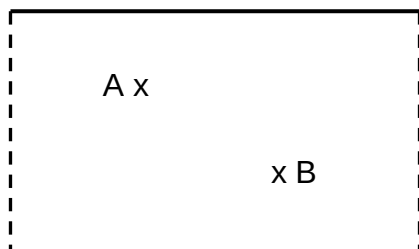
Úloha 12: Skaut obývající srub P má nabrat vodu v potoce p a donést ji do stanu Q (obr. 1). Předpokládáme, že potok je přibližně přímočarý a on se též může pohybovat v terénu po přímce, určete jeho nejkratší dráhu.



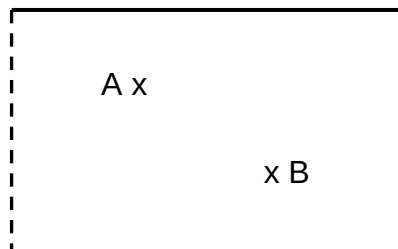
Obr. 1

Návod: Sestrojíme bod P' souměrný s bodem P podle q , průsečík $P'Q$ s přímkou q je vrcholem lomené čáry, které je nejkratší dráhou.

Úloha 13: Sportovec na hřišti v místě A má doběhnout na okraj obdélníkového hřiště, přeběhnout na jeho druhý okraj a skončit v místě B . Určete jeho nejkratší dráhu v případě, že jde o situaci podle obr. 2 nebo podle obr. 3.



Obr. 2

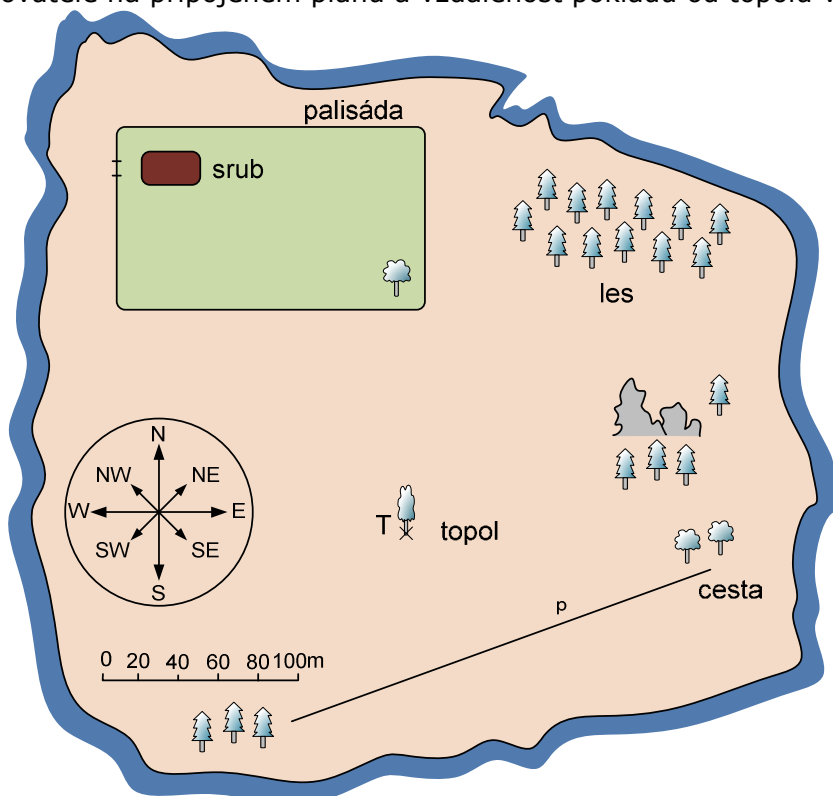


Obr. 3

Vysvětlete, proč se po této dráze za těchto podmínek pohybuje koule na kulečnickovém stole.

Návod: Sestrojte body souměrné s body A , B podle tučně vyznačených stran hřiště.

Úloha 14 – Poloha pokladu: Podle nalezeného starého zápisu se v místě zbytků obdélníkové palisády ohraničující bývalý pirátský srub nalézá ukrytý poklad. Přesná poloha pokladu u palisády je určena tak, že pozorovatel z přímočaré cesty p vidí topol T v zákrytu (v jedné přímce) s polohou pokladu tak, že vzdálenost pokladu od topolu je stejná jako vzdálenost pozorovatele od topolu. Určete možnou polohu pokladu u palisády a polohu pozorovatele na připojeném plánu a vzdálenost pokladu od topolu viz obr. 4.



Obr. 4

Řešení: Poloha pokladu je průsečíkem obrazu cesty p s obrysem palisády ve středové souměrnosti se středem T , jsou dvě možnosti. Vzdálenosti jsou přibližně stejné, asi 116 m.

Zábavná úloha

Sestavte deset stejných koleček tak, aby vždy čtyři byly na jedné úsečce.

Návod: Řešení najdeme pomocí vrcholů a průsečíků úhlopříček pravidelného pětiúhelníku.

Literatura:

- [1] KELLY, B., ALEXANDER, B., ATKISON, P., WARNICA, E. *Mathematics 9*. Canada: Addison-Wesley, 1981. 438 s.

13. Skládání shodných zobrazení



Úloha 1 – Skládání obrátů

Uvažujme množinu čtyř obrátů: P – vpravo v bok, L – vlevo v bok, Z – čelem v zad, N – zůstat na místě a složení dvou obrátů, např. P. P = Z, Z. L = P, N. Z = Z.

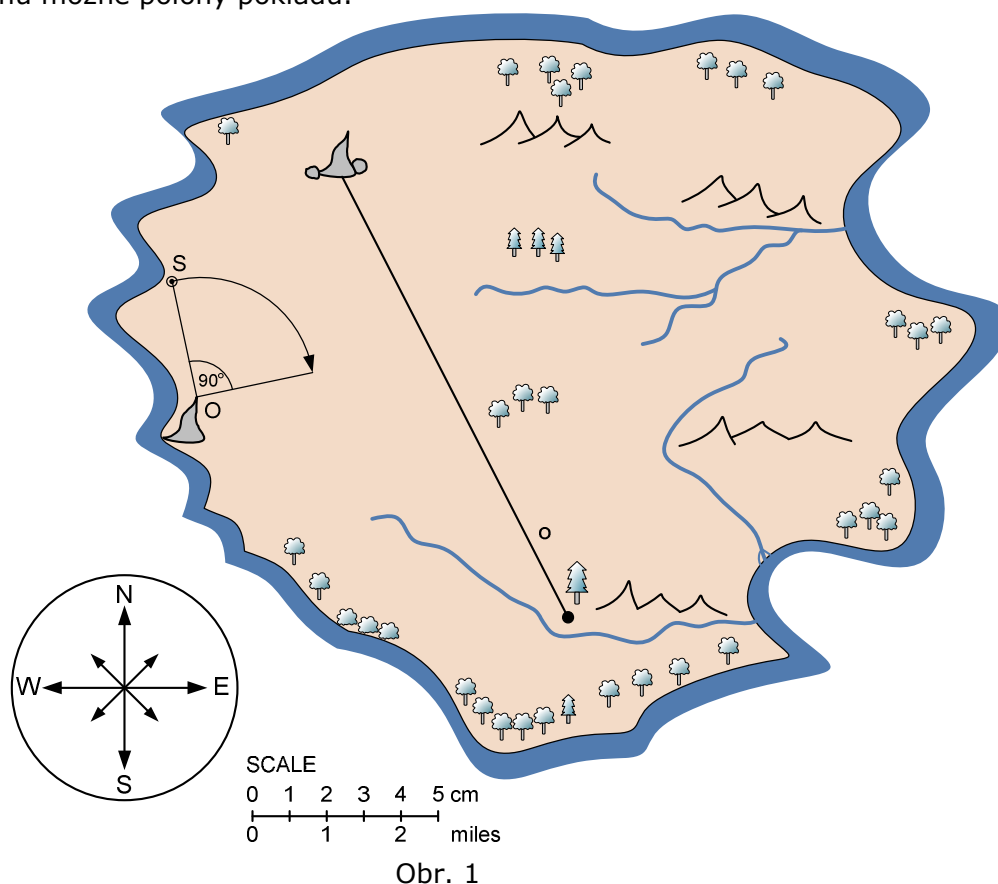
- Sestavte tabulku výsledků pro všechny dvojice.
- Ukažte, že tato operace je komutativní.
- Ukažte na příkladech, že tato operace je asociativní.
- Obrat N je neutrální prvek (jako nula při sčítání nebo 1 při násobení). Určete inverzní prvky k obrátům P, L, Z, N.
- Vypočítejte více způsobů a výsledek ověřte při skutečném otáčení: P. L. L. Z. P. Z. L
- Řešte rovnice L. X = P, Z. X = N, P. X = Z dvěma způsoby – zkusmo a algoritmem pomocí inverzních prvků.

Zkusmo a algoritmicky (vynásobením obou stran inverzním prvkem ke koeficientu neznámé).

Úloha 2 – Hledání pokladu (1)

Na ostrově v moři má být údajně ukryt starý pirátský poklad. K dispozici je plánek ostrova (obr. 1) s šifrou o místě uložení. Jsou možné dvě varianty:

- Z výchozí polohy **S** je třeba provést otočení kolem útesu **O** o pravý úhel ve směru ručiček na hodinkách a potom tuto polohu zobrazit podle osy **o** určené významným starým topolem a skálou.
- Z výchozí polohy **S** provést obě zobrazení v opačném pořadí, tj. napřed zobrazit podle osy **o** a **potom** provést dané otočení (úloha a). Určete na plánu možné polohy pokladu.

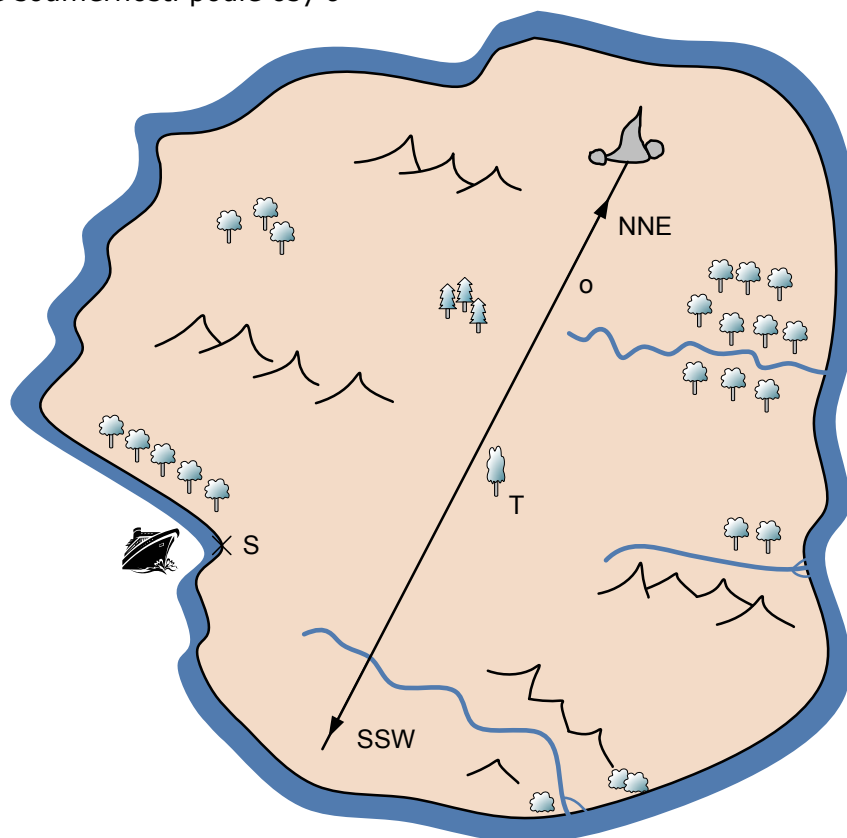


Obr. 1

Úloha 3 – Hledání pokladu (2)

Úloha je obdobná úloze (1). Poloha pokladu je zašifrována tak, že výchozí polohu S :

- napřed zobrazíme podle osy o procházející na plánu (obr. 2) skálou ve směru jihojihozápadním a potom sestrojíme obraz této polohy ve středové souměrnosti podle stromu T
- zobrazíme ve středové souměrnosti podle T a potom výslednou polohu zobrazíme v osové souměrnosti podle osy o



Obr. 2

Skládání dvou osových souměrností

Úloha 4: Kolmo k číselné ose jsou umístěny dvě osy $o_1(5)$, $o_2(12)$. Jejich polohy jsou určeny souřadnicemi v závorkách.

- Určete souřadnici obrazu bodu $P(0)$ umístěného v počátku, který dostaneme, když zobrazíme bod P napřed v souměrnosti podle osy o_1 a potom získaný obraz v souměrnosti podle osy o_2 . $P''(14)$.
- Určete souřadnici bodu $P(0)$, který dostaneme, když zobrazíme napřed bod P podle osy o_2 a získaný obraz zobrazíme podle osy o_1 . $P''(-14)$.

Výsledek: a) $P'(10)$, $P''(14)$

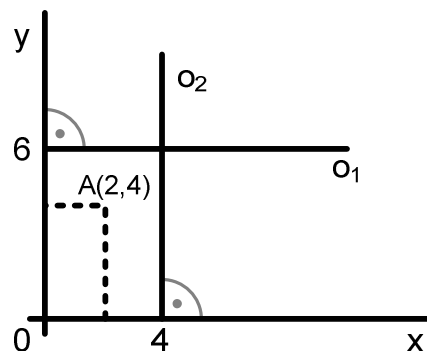
b) $P'(24)$, $P''(-14)$

Poznámka: Tuto úlohu lze formulovat též jako skládání středových souměrností.

Úloha 5:

Určete souřadnice obrazu bodů **A** (2,4), **B** (0,0), **C** (-3,5), **D** (-1,7), **E** (0,-3) ve složeném zobrazení podle osy o_1 a potom podle osy o_2 (obr. 3). Jaké by byly souřadnice obrazů bodů při záměně pořadí obou zobrazení?

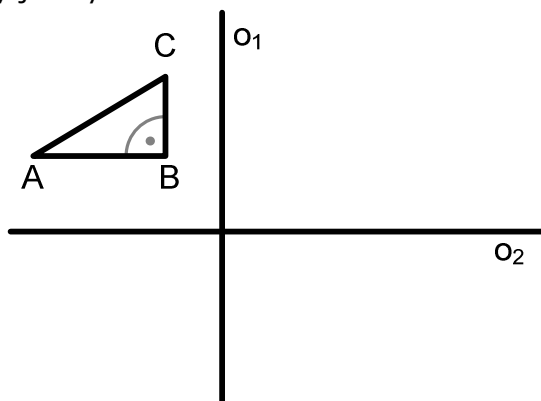
Výsledek: A (6,8), při záměně dostaneme stejný výsledek.



Obr. 3

Úloha 6:

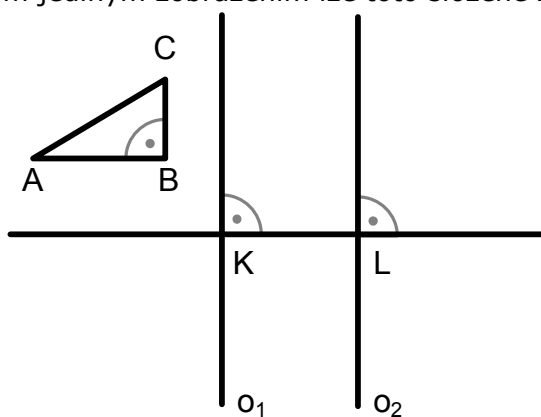
- a) Sestrojte obraz trojúhelníku ABC ve složeném zobrazení podle osy o_1 a potom podle osy o_2 (obr. 4a). Který jediným zobrazením lze toto složené zobrazení nahradit?



obr. 4a

Výsledek: Středová souměrnost podle počátku souřadnicové soustavy.

- b) Sestrojte obraz trojúhelníku ABC ve složeném zobrazení podle osy o_1 a potom podle osy o_2 (obr. 4b). Kterým jediným zobrazením lze toto složené zobrazení nahradit?



Obr. 4b

Výsledek: Posunutí o vektor 2. KL .

14. Řešení úloh více způsoby

Jedním z významných principů vyučování matematice je řešení úloh více způsoby. Uplatňování tohoto principu vede k hlubšímu vhledu do podstaty dané tematiky, vyzvedává souvislosti v matematice, poukazuje na její harmonii.

Řešení úloh rovnicí a úsudkem

Příklad 1. Turista ušel dopoledne $\frac{2}{5}$ celodenní trasy, odpoledne $\frac{1}{3}$ celodenní trasy a do cíle mu zbývalo 9 km. Kolik ušel za celý den?

Řešení rovnicí. Označíme x délku celodenní trasy v km, dostaneme rovnici

$$\frac{2}{5}x + \frac{x}{3} + 9 = x$$

$$x = 33\frac{3}{4}$$

Druhý způsob řešení je pomocí zlomků. Dostaneme, že $\frac{4}{15}$ celodenní trasy odpovídají délce 9 km, odkud opět vypočítáme délku celodenní trasy. Provedeme ještě zkoušku výpočtem, kolik turista ušel dopoledne a odpoledne.

Vhodné jsou také modifikace úlohy, které ukazují na nutnost přesného vyjádření a pochopení úlohy, např. kdyby turista odpoledne ušel jednu třetinu dopolední trasy, což ovšem vede k jinému výsledku. Cenná mohou být též různá zobecnění úlohy.

Obvyklé *úlohy o pohybu* můžeme řešit třemi způsoby: Rovnicí, úvahou (vydělením „náskoku“ rozdílem rychlostí) a graficky (určením průsečíků grafů dvou lineárních funkcí). Podobně lze řešit *úlohy o společné práci*. Vedle tradiční rovnice (pro dva pracovníky)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x} \quad \text{nebo} \quad \frac{P}{a} + \frac{P}{b} = \frac{P}{x} \quad (\text{to už je možno pokládat za dva způsoby, kde je zajímavé, že na práci } P \text{ kořen } x \text{ nezávisí})$$

lze postupovat úvahou o zlomcích vykonané práce za časovou jednotku. Pedagogicky účinnější je vypočítat demonstračně méně úloh více způsoby než více úloh způsobem jedním. Někdy se mohou jevit tyto různé pohledy na řešení úlohy erudovaného učitele triviálně, ale nemusí tomu tak být z hlediska žáka.

Další typ algebraických úloh řešených dvěma způsoby.

Příklad 2 – (MO 54, Z 5)

Tři princové šli na mnohohlavého draka, první princ mu usekl levou rukou polovinu a pravou dvě. Totéž udělal se zbylými hlavami druhý a třetí princ. Potom drak padl bezhlavý k zemi. Na kolikahlavého draka se princové vydali?

Řešení od zadu. Třetí princ usekl levou rukou polovinu zbylých hlav a pravou dvě a drak byl bezhlavý. Proto poloviny zbylých hlav byly dvě hlavy, celkem usekl 4 hlavy. Po akci druhého prince zbyly tedy čtyři hlavy, takže druhý princ jich usekl 8 hlav a podobně první princ 16 hlav. Drak měl původně 28 hlav.

Řešení od předu rovnicí. Jestliže měl drak původně x hlav, pak první princ usekl $\frac{x}{2} + 2$,

druhý $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 2$ a třetí $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - 3\right) + 2$ dračích hlav. Dostaneme rovnici

$$\frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - 3\right) + 2 = x, \text{ odkud } x = 28.$$

Algebraické a geometrické řešení úloh

Pěkným příkladem řešení úlohy více způsoby je řešení problému algebraicky a geometrickou konstrukcí. Ukážeme příklad, který bývá v rekreační matematice označován jako stará indická úloha.

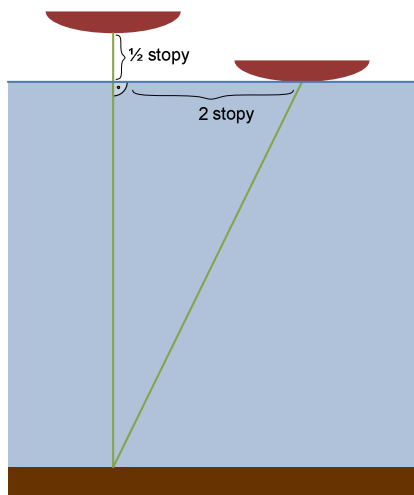
Příklad 3 – Lotosový květ [1]

Nad hladinu jezera vyčnívá půl stopy květ lotosu. Když zafouká vítr, dostane se květ na hladinu dvě stopy od místa, kde rostl. Jak hluboké je jezero? (Stopa je asi 30 cm.)

Algebraické řešení: Z náčrtu je vidět, že východiskem je pravoúhlý trojúhelník (svislý stonk lotosu, hladina, nakloněný stonk). Je-li hloubka jezera x stop, pak stonk je dlouhý $(x + 0,5)$ stopy.

$$\text{Platí } x^2 + 2^2 = (x + 0,5)^2$$

$$x = 3,75$$



Obr. 1

Geometrické řešení: Narýsujeme plánek situace v měřítku 1 stopa = 4 cm, polopřímku svislého stonku lotosu, květ je počátečním bodem, hladinu vody, lotos jako bod na hladině. Průsečík osy úsečky dvou poloh květu s přímkou stonku se protnou na dně jezera. Měřením ověříme vypočítanou délku.

Poznámka: Úlohu lze řešit ještě třetím způsobem pomocí podobnosti dvou pravoúhlých trojúhelníků. K tomu je třeba využít střed úsečky, která spojuje obě polohy květu lotosu.

Řada úloh tohoto typu je uvedena v článku *Pythagorova věta a osa úsečky*.

Literatura:

[1] PELERMAN, J. I. *Zajímavá geometrie*. Praha: Mladá fronta, 1954. 225 s.

15. Pythagorova věta a osa úsečky

Cílem tohoto námětu je připomenout jeden typ geometrických úloh využitelných na 2. stupni ZŠ nebo na nižším stupni gymnázia jako aplikaci konstrukce osy úsečky, Pythagorovy věty, řešení lineárních rovnic a vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu. Na těchto úlohách lze dobře demonstrovat a využít dvojí odlišný způsob řešení, který navozuje důležitý pedagogický moment – *vědomí souvislosti mezi algebrou a geometrií*, jejich harmonického vztahu. Při samostatném řešení těchto úloh žáci nejen upevňují svou *kompetenci k učení a k řešení problémů*, ale při vhodně organizované práci žáků (např. práce ve dvojicích – jeden žák řeší úlohy algebraicky a druhý geometrickou konstrukcí a další úlohu naopak) nebo navozené diskusi (rozběr a výsledky řešení problému) a spolupráci posilují *kompetence komutativní a kompetence sociální a personální*. K úlohám lze také přistoupit tak, že v nižším ročníku řešíme úlohy pomocí osy úsečky a později se k těmto problémům vrátíme algebraickou metodou.

Příklad 1

Je dán pravoúhlý trojúhelník ACD s pravým úhlem při vrcholu C , $|AC| = 7,5$ cm, $|CD| = 12,5$ cm. Na přímce CD určete bod B tak, aby $|AB| = |BD|$.

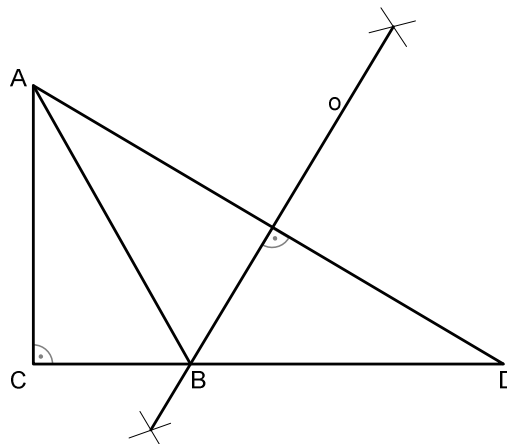
Řešení:

Úlohu vyřešíme nejprve geometrickou konstrukcí.

- a) Z rozboru vidíme, že bod B je vrcholem rovnoramenného trojúhelníku ABD se základnou AD , přitom bod B má ležet na přímce CD .

Konstrukce a její zápis:

1. $\triangle ACD$, $|\angle ACD| = 90^\circ$, $|AC| = 7,5$ cm, $|CD| = 12,5$ cm
2. o , osa AD
3. B , $B = o \cap \leftrightarrow CD$



Obr. 1

- b) Polohu bodu B můžeme určit také výpočtem délky úsečky BC . Označíme $|BC| = x$ cm, pak $|AB| = |BD| = (12,5 - x)$ cm. Protože trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB , platí $7,5^2 + x^2 = (12,5 - x)^2$ (1)
Tato rovnice „se tváří kvadraticky“, snadno se však přesvědčíme, že je lineární. Jejím řešením dostaneme, že $x = 4$. Vzdálenost $|BC| = 4,0$ cm. Výsledek ověříme měřením v provedené konstrukci.

Řešme obdobu úlohy 1. pro $|AC| = 9$ cm, $|CD| = 6$ cm a napíšeme-li mechanicky obdobu rovnice (1), dostaneme rovnici $9^2 + x^2 = (6 - x)^2$
 $x = -3,75$

Z geometrické konstrukce ihned vidíme, co tento výsledek znamená. Bod B leží na opačné polopřímce k $\rightarrow CD$, $|BC| = 3,8$ cm. Žáci sami přijdou na podmínku, kdy tento případ (při obecné formulaci úlohy 1 bez konkrétních dat o délce úseček) nastane, $|AC| > |CD|$.

Obdobu úlohy 1 lze užít jako *samostatnou frontální práci* (s možností vzájemné kooperace) pro dvě skupiny žáků A a B při vyučování (po předchozím rozboru problému nebo vyřešením vzorové úlohy pod vedením učitele). Pokud žáci rýsují do sešitu nebo na

papíry formátu A4, lze užít těchto vstupních dat (výsledky výpočtu jsou uvedeny v závorkách):

- A** a) $|AC| = 6 \text{ cm}$, $|CD| = 10 \text{ cm}$, ($|BC| = 3,2 \text{ cm}$)
 b) $|AC| = 10 \text{ cm}$, $|CD| = 5 \text{ cm}$, ($|BC| = 7,5 \text{ cm}$)

- B** a) $|AC| = 8 \text{ cm}$, $|CD| = 12 \text{ cm}$, ($|BC| = 3,3 \text{ cm}$)
 b) $|AC| = 12 \text{ cm}$, $|CD| = 6 \text{ cm}$, ($|BC| = 9 \text{ cm}$)

Podstata úlohy 1 je skryta v následujícím příkladu.

Příklad 2

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , $|AB| = 8 \text{ cm}$, a výškou $v_c = 7 \text{ cm}$.

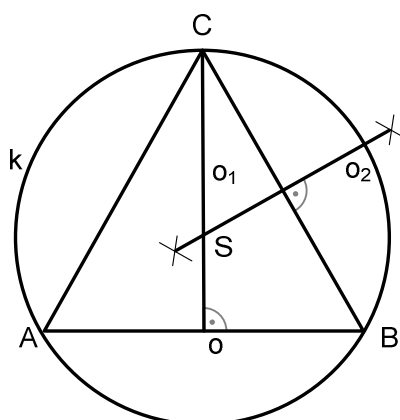
- a) Sestrojte kružnici opsanou k trojúhelníku ABC .
 b) Vypočítejte poloměr kružnice opsané k trojúhelníku ABC .

Řešení a)

Rozbor: Pro střed S kružnice opsané k trojúhelníku ABC platí $|AS| = |BS| = |CS|$, takže bod S leží na ose o_1 strany AB a zároveň na ose o_2 strany BC .

Konstrukce a její zápis:

- o_1, o_2
- $S = o_1 \cap o_2$
- $k(S, |AS|)$



Obr. 2

Řešení b)

Trojúhelník BSO , kde O je střed strany AB , je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu O , $|BS| = |AS| = x \text{ cm}$, $|BO| = 4 \text{ cm}$, $|OS| = (7 - x) \text{ cm}$. Podle Pythagorovy věty dostaneme

$$x^2 = 4^2 + (7 - x)^2$$

$$x = \frac{65}{14} = 4,6$$

Poloměr kružnice opsané k trojúhelníku ABC je přibližně $4,6 \text{ cm}$. Výsledek ověříme měřením v řešení a).

Návrh vstupních dat pro žákovskou práci (výsledky výpočtu jsou uvedeny v závorkách):

- A** a) $|AB| = 6 \text{ cm}$, $v_c = 12 \text{ cm}$, ($r = 6,4 \text{ cm}$)
 b) $|AB| = 10 \text{ cm}$, $v_c = 4 \text{ cm}$, ($r = 5,1 \text{ cm}$)

- B** a) $|AB| = 12 \text{ cm}$, $v_c = 8 \text{ cm}$, ($r = 6,3 \text{ cm}$)
 b) $|AB| = 12 \text{ cm}$, $v_c = 3 \text{ cm}$, ($r = 7,5 \text{ cm}$)

Příklad 3

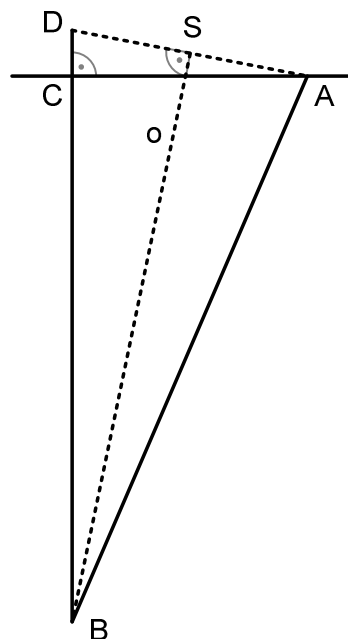
Do bazénu s vodou je svisle ponořena tyč, která se dolním koncem opírá o dno bazénu. Délka části tyče nad vodou je 15 cm . Pootočíme-li tyč opřenou o dno bazénu tak, že se horní konec tyče dostane na hladinu, pak vzdálenost horního konce tyče na hladině od původní svislé polohy tyče je 75 cm . Určete hloubku vody v bazénu.

a) Řešení geometrickou konstrukcí

Rozbor: Úsečka BD znázorňuje svislou polohu tyče, přímka AC hladinu, přitom AB je poloha tyče po otočení. Trojúhelník ABD je rovnoramenný se základnou AD , proto bod B leží na ose úsečky AD a na kolmici k přímce AC . Konstrukce je provedena v měřítku 1:30, žáci je realizují v měřítku 1:10.

Zápis konstrukce:

1. $\triangle ACD$, $|\angle ACD| = 90^\circ$, $|AC| = 2,5$ cm, $|CD| = 0,5$ cm
2. o , osa AD
3. B , $B = o \cap \leftrightarrow CD$



Obr. 3

Měřením úsečky BC zjistíme, že $|BC| = 6$ cm. Hloubka vody v bazénu je 6 cm. $30 = 180$ cm.

b) Řešení výpočtem

Vyjdeme ze situace podle obr. 3. Trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB . Označíme hloubku vody x cm, $|BC| = x$. Délka tyče je $(x + 15)$ cm. Z trojúhelníku ABC dostaneme

$$x^2 + 75^2 = (x + 15)^2$$

$$x = 180$$

Příklad 3 je zajímavý tím, že ukazuje způsob výpočtu hloubky vody z údajů získaných pouze nad vodní hladinou. Povšimněme si, že tyto úlohy lze řešit ještě jiným způsobem výpočtu, totiž užitím vztahu $\triangle ACD \approx \triangle BSD$ (uu), kde bod S je střed AD , a výpočtem $|AD|$ (obr. 3). Podobně lze ovšem přistoupit k řešení ostatních úloh tohoto typu.

Zobecněnou úlohu 1 lze formulovat takto: Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC (s pravým úhlem při vrcholu C), jsou-li dány délky $|AC|$ a $|CD| = |AB| + |BC|$. Vypočítejte $|AB|$ a $|BC|$.

Zobecněnou úlohu 3 (příp. 4) lze formulovat takto: Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC (s pravým úhlem při vrcholu C), je-li dáno $|AC|$ a $|CD| = |AB| - |BC|$. Vypočítejte $|AB|$ a $|BC|$.

Přidáme ještě návrh vstupních dat pro řešení poslední zmíněné úlohy geometrickou konstrukcí i výpočtem pro žákovskou práci (výsledky výpočtu jsou uvedeny v závorkách):

A $|AC| = 12$ cm, $|CD| = |AB| - |BC| = 8$ cm, ($|AB| = 13$ cm, $|BC| = 5$ cm).

B $|AC| = 9$ cm, $|CD| = |AB| - |BC| = 3$ cm, ($|AB| = 15$ cm, $|BC| = 12$ cm).

Idea předchozích úloh je skryta v následujících příkladech.



Příklad 4

V kruhové úseči kruhu $K(S, |SV|)$ známe délku tětivy $t = |AB| = 8$ cm a vzdálenost $v = |VS_1| = 1$ cm. (Přímka VS_1 je osou úseče.) Určete poloměr kruhu K a) výpočtem, b) geometrickou konstrukcí.

a) Řešení výpočtem

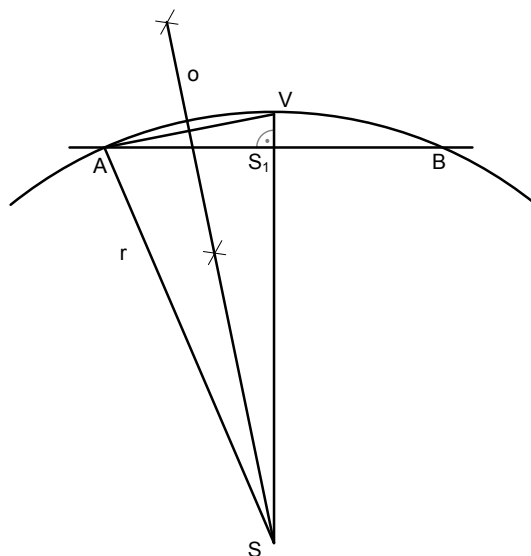
$$|AS_1| = |BS_1| = \frac{1}{2}t = 4 \text{ cm}, |VS_1| = 1 \text{ cm}.$$

Poloměr $|AS|$ kruhu K vypočítáme z pravoúhlého trojúhelníku AS_1S , $|AS| = x$ cm, $|SS_1| = (x - 1)$ cm. Užitím Pythagorovy věty dostaneme rovnici

$$x^2 = 4^2 + (x - 1)^2, \text{ odkud } x = 8,5 \text{ cm. Poloměr } r \text{ kruhu } K \text{ je } 8,5 \text{ cm.}$$

b) Řešení geometrickou konstrukcí

Řešení provedeme tak, že sestrojíme střed S kruhu K jako průsečík osy úsečky AV a přímky VS_1 (obr. 4). Měřením ověříme výsledek, který jsme dostali výpočtem.



Obr. 4

Návrh vstupních dat pro žákovskou práci (výsledky výpočtu jsou uvedeny v závorkách):

- A** $t = 12$ cm, $v = 2$ cm, ($r = 10$ cm);
B $t = 10$ cm, $v = 3$ cm, ($r = 5,7$ cm).

V úlohách 6, 7 a 9,10 řešení vynecháme.

Příklad 5

Je dána kružnice $k(S, r)$, úsečka SA a polopřímka SX kolmá k úsečce SA .

- a) Sestrojte kružnici se středem na polopřímce SX , která se dotýká kružnice k a prochází bodem A .
b) Vypočítejte poloměr r' kružnice z úlohy a).

Návrh vstupních dat pro žákovskou práci (výsledky výpočtu jsou uvedeny v závorkách):

- A** a) $r = 3$ cm, $|SA| = 6$ cm, ($r' = 7,5$ cm);
b) $r = 4$ cm, $|SA| = 2$ cm, ($r' = 2,5$ cm);
B a) $r = 2$ cm, $|SA| = 6$ cm, ($r' = 10$ cm);
b) $r = 5$ cm, $|SA| = 3$ cm, ($r' = 3,4$ cm).



Příklad 6

Je dána úsečka CD , na ose úsečky CD bod E a kružnice $k(E, r)$. Střed úsečky CD je bod O .

- a) Sestrojte všechny kružnice, které procházejí body C, D a dotýkají se kružnice k .
b) Vypočítejte poloměry kružnic z úlohy a).

Návrh vstupních dat pro žákovskou práci (výsledky výpočtu jsou uvedeny v závorkách):

- A** $|CD| = 9$ cm, $|OE| = 8$ cm, $r = 2,5$ cm ($r_1 = 4,6$ cm, $r_2 = 6,2$ cm);
B $|CD| = 11$ cm, $|OE| = 9$ cm, $r = 3$ cm ($r_1 = 5,5$ cm, $r_2 = 7,3$ cm).

**Příklad 7**

Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, $|AB| = 9,6$ cm, $|CD| = 7,2$ cm, s výškou $v = 8,4$ cm a jeho kružnice opsaná. Vypočítejte poloměr r této kružnice.

Řešení:

Označíme bodem S střed kružnice opsané lichoběžníku $ABCD$ (obr. 5), E je střed AB , F střed CD .

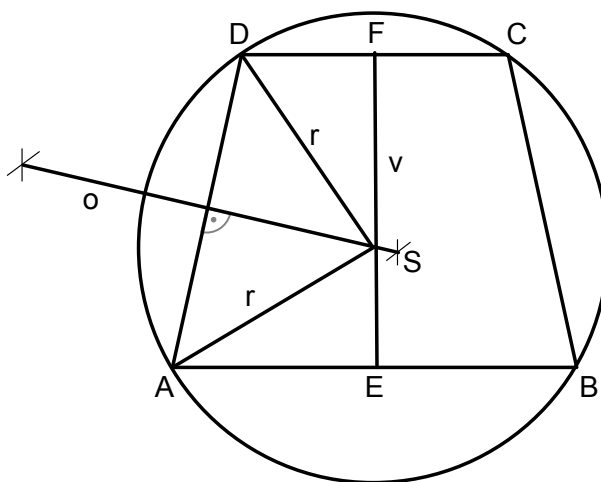
Pak $r = |AS| = |DS|$ a z pravoúhlých trojúhelníků AES a DFS dostaneme

$$|AE|^2 + |ES|^2 = |FS|^2 + |FD|^2$$

Označíme-li $|ES| = x$ cm, obdržíme z předchozího vztahu rovnici

$$4,8^2 + x^2 = (8,4 - x)^2 + 3,6^2$$

$$x = 3,6$$



Obr. 5

Pro poloměr r kružnice opsané lichoběžníku $ABCD$ platí $r^2 = |AE|^2 + |ES|^2$, takže $r = 6$ cm.

Výsledek ověřte měřením v konstrukci na lichoběžníku $ABCD$ (obr. 5).

Návrh vstupních dat pro žákovskou práci (výsledky výpočtu jsou uvedeny v závorkách):

- A** a) $|AB| = 8$ cm, $|CD| = 3$ cm, $v = 6$ cm ($r = 4,4$ cm);
 b) $|AB| = 7$ cm, $|CD| = 4$ cm, $v = 2$ cm ($r = 3,7$ cm);
- B** a) $|AB| = 6$ cm, $|CD| = 3$ cm, $v = 5$ cm ($r = 3,5$ cm);
 b) $|AB| = 9$ cm, $|CD| = 2$ cm, $v = 2,5$ cm ($r = 5,2$ cm).

Jistou obdobou předcházející úlohy o lichoběžníku je úloha „o ptácích u řeky“ ze středověké matematiky.

Příklad 8

Na obou březích řeky stojí proti sobě dvě palmy. Jedna je vysoká 30 loktů a druhá 20 loktů, vzdálenost mezi palmami je 50 loktů (1 loket je asi 60 cm). Na vrcholcích obou palm sedí dva ptáci. Oba ptáci současně zpozorují v řece rybu přesně proti oběma palmám. Letí k rybě stejnou rychlostí a doletí k ní současně. V jaké vzdálenosti od vyšší palmy se ryba objevila?

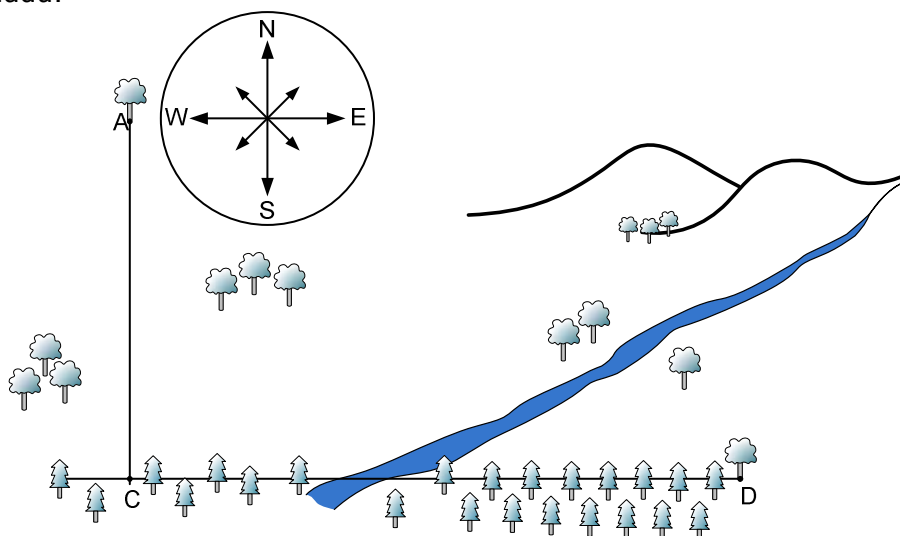
Úlohu lze opět řešit početně i geometrickou konstrukcí, výsledek je 20 loktů.

Soubor těchto úloh by bylo možno dále rozšiřovat, ale spokojíme se jen s doplněním Motivace „z reálného světa“ pro úlohu 1. (Takové motivace mohou sehrát zejména v nižších ročnících pedagogicky velmi pozitivní roli.) Můžeme využít např. námět „hledání pokladu“ obvyklý v učebnicích USA a Kanady.

Příklad 9

Na ostrově je ukryt poklad tak, že je stejně vzdálen od dvou významných stromů A , D a zároveň je na okraji lesa (obr. 6). Strom A je vzdálen od okraje lesa (vzdálenost $|AC|$)

75 kroků, vzdálenost $|CD|$ je 125 kroků. Určete geometrickou konstrukcí i výpočtem polohu pokladu.



Obr. 6

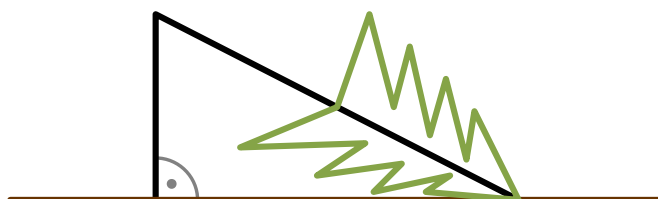
Motivaci „hledání pokladu“ lze využít v dalších typech úloh – na průniky množin bodů dané vlastnosti nebo na shodná zobrazení a jejich skládání, to však již přesahuje tematiku tohoto článku.

Příklad 10

Při větrné bouři na Šumavě se zlomil starý smrk vysoký 15 m. Jeho vršek dopadl 9 m od úpatí stromu. (Obr. 7)

Určete, v jaké výšce od země ke zlomu došlo:

- výpočtem
- geometrickou konstrukcí v měřítku 1:100



Obr. 7

Výsledek: Strom se zlomil ve výšce 4,8 m od země.

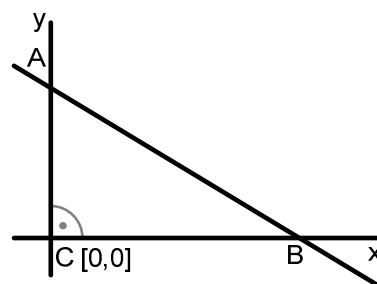
Uvedeme ještě úlohu poněkud jiného typu.



Příklad 11 – Kde bude stát motorest?

V místech A , B , C jsou tři křižovatky přímých dálnic AB , BC , AC , $|AB| = 13$ km, $|BC| = 12$ km, $|AC| = 5$ km.

V blízkosti těchto silnic má být umístěn motorest tak, aby byl od všech tří dálnic stejně vzdálen. Určete všechny možnosti pro umístění motorestu a jeho vzdálenosti od dálnic.



Obr. 8

Řešení. Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C . Poloha motorestu bude ve středu kružnice vepsané trojúhelníku ABC nebo trojúhelníků vně vepsaných tomuto trojúhelníku, takže jsou čtyři možnosti.

- a) Vypočítáme poloměr ρ kružnice vepsané trojúhelníku ABC a polohu jejího středu S . Porovnáním obsahů trojúhelníků ABS , BCS , ACS a trojúhelníku ABC dostaneme

$$\frac{1}{2}\rho(13 + 12 + 5) = 30,$$

$$\rho = 2$$

Zavedeme-li soustavu souřadnic $C [0,0]$, CB osa x , CA osa y , je $S[2,2]$.

- b) Vypočítáme poloměr ρ_1 kružnice vně vepsané trojúhelníku ABC , která se dotýká strany AB v bodě T , $|AT| = x$, $|BT| = y$ a polohu jejího středu S_1 . Podle obr. 8 platí

$$x + y = 13$$

$$5 + x = 12 + y$$

$$x = 10, y = 3$$

$$\rho_1 = 15, S_1[15,15]$$

Podobně vypočítáme pro další dvě kružnice vně vepsané:

$$\rho_2 = 3, S_2[3,3] \text{ a } \rho_3 = 10, S_3[10,10]$$

Poznámka. Problém lze řešit pomocí vzorce pro vzdálenost bodu od přímky z analytické geometrie.

Literatura:

- [1] HOUSKA, J. Pravý úhel a osa úsečky. *Matematika - fyzika - informatika*. 1999/2000, roč. 9, č. 4, s. 325–332.

16. Kombinatorické úlohy

Úloha 1

Každý člen týmu podá ruku druhému. Kolik podání ruky se uskuteční, jestliže tým má dva, tři, čtyři, pět, šest členů? Sestavte tabulku.

Výsledek: 1, 3, 6, 10, 15.

Úloha 2

a) Sportovní soutěže se zúčastní 7 týmů. Přitom každý tým hraje jeden zápas s každým. Kolik zápasů se uskuteční? (Odvoďte pomocí narýsované tabulky výsledků.)

Výsledek: 21.

b) Odvoďte obecný vzorec pro případ, že se soutěže zúčastní n týmů.

Výsledek: $\left[\frac{1}{2}n(n-1) \right]$

Úloha 3

Mezi každými dvěma z osmi měst se mají zřídit letecké linky. Kolik leteckých linek bude ustaveno?

Výsledek: 28.

Úloha 4

a) Kolik úhlopříček má konvexní desetiúhelník?

Výsledek: 35.

b) Kolik úhlopříček má konvexní stoúhelník?

Výsledek: 4850.

c) Odvoďte vzorec pro počet úhlopříček konvexního n -úhelníku.

Výsledek: $(n \geq 3) \cdot \left(\frac{1}{2}n(n-3) \right)$

d) Který konvexní mnohoúhelník má stejný počet stran jako úhlopříček?

Výsledek: pětiúhelník.

Úloha 5

a) Kolik přímek je určeno osmi (deseti) body, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce?

Výsledek: 28, 45.

b) Určete počet hran, stěnových a tělesových úhlopříček v kvádru.

Výsledek: $12 + 12 + 4$.

c) Určete počet hran, stěnových a tělesových úhlopříček pětibokého pravidelného hranolu. Výsledek: $15 + 20 + 10$.

d) Porovnejte výsledky úloh b), c) s počtem všech přímek určených vrcholy tělesa.

e) Vysvětlete souvislost mezi úlohami 1, 2, 3, 5).

Úloha 6

a) Lyžaři vjíždějí na běžeckou trať vždy po jedné minutě. Kolik existuje pořadí pro dva, tři, čtyři, pět lyžařů? Sestavte tabulku.

Výsledek: 2, 6, 24, 120.

b) Na lyžařskou trať z úlohy a) mají nastoupit dvě dívky a tři hoši. Kolik existuje pořadí pro jejich odstartování?

Výsledek: 10.

Úloha 7

Kolika způsoby lze vybrat tříčlenné mužstvo ze čtyř, pěti, šesti zájemců?

Výsledek: 4, 10, 20.

Úloha 8 – Pascalův trojúhelník (obr. 1)

- a) Vysvětlete, jak vznikají čísla ve vodorovném řádku z řádku nad ním. Doplňte několik dalších řádek schématu.
- b) Všimněte si „principu hokejky“ – součet všech čísel v šikmém řádku od shora se rovná číslu níže vpravo nebo vlevo, např. $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
- c) Čísla v Pascalově trojúhelníku souvisejí s některými z předchozích úloh.

Vysvětlete jak!

**Úloha 9**

V konvexním n -úhelníku existuje nejvýše $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$ průsečíků jeho úhlopříček.

- a) Ověřte toto tvrzení dvěma způsoby (graficky a dosazením do výrazu) pro $n = 3, 4, 5, 6, 7$.
Výsledky: 0, 1, 5, 15, 35
- b) Jak souvisí tato čísla s Pascalovým trojúhelníkem?
Návod: Zvětšete Pascalův trojúhelník o další vodorovný řádek a všimněte si šikmého řádku za oběma vyznačenými.

Poznámka: Jméno francouzského filozofa, matematika a přírodovědce Blaise Pascala (čti bléz paskala), který žil v 17. stol., znáte z fyziky. Víte, s jakým zákonem je jeho jméno spojeno?

**Úloha 10 – Součet $1 + 2 + 3 + \dots + n$ geometricky**

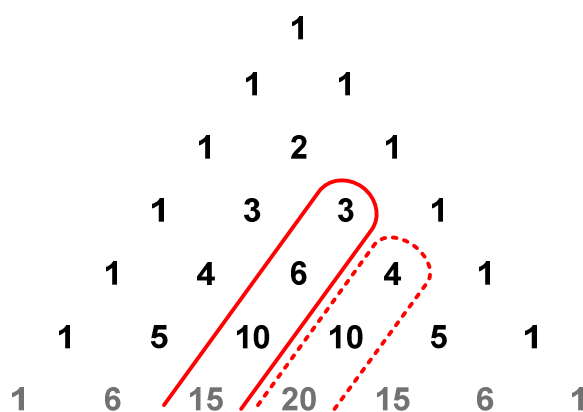
- a) Pro součet s prvních n přirozených čísel platí jednoduchý vzorec $s = \frac{1}{2}n(n+1)$. Vzorec

lze snadno dokázat tak, že pod součet $1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 + n$ napíšete tento součet v převráceném pořadí, tedy

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 + n \\ n + n - 1 + n - 3 + \dots + 2 + 1. \end{array}$$

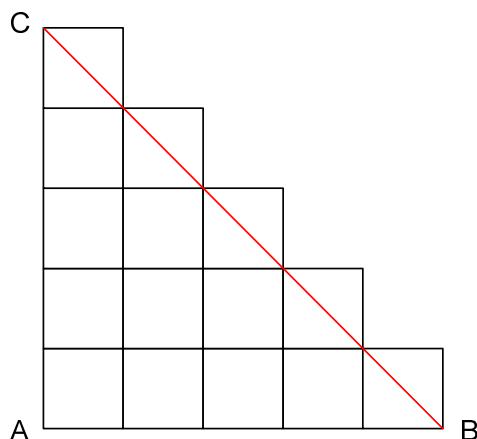
Pak sčítáme vždy dva sčítance pod sebou, vyjde pokaždé $n + 1$, takových součtů je n a celkový součet počítáme dvakrát, odtud je výsledný vzorec. Vysvětlete podrobně a vzorec na několika příkladech ověřte.

- b) K uvedenému součtu se traduje tato historka. Někdy koncem 18. stol. na jedné pruské škole dal učitel školákům sečíst všechna čísla od jedné do sta. Domníval se, že je na chvíli zaměstná. Jeden bystrý žák však měl výsledek ihned. (Vyrosl z něho slavný matematik *Carl Friedrich Gauss*.) Jak to provedl a jaký byl výsledek?
Výsledek: 5 050
- c) Vzorec z a) lze vysvětlit také geometricky. Na obr. 2 je narysován „zubatý“ trojúhelník, který se skládá z jednotkových čtverců, součet obsahů čtverců v každém řádku představuje jedno přirozené číslo od jedné do n (na obr. 2 je $n = 5$). Obsah celého útvaru můžeme počítat jako součet obsahu trojúhelníku ABC , který je $\frac{1}{2}n^2$, a



Obr. 1

obsahu n odřízlých půltverců úsečkou BC , který je $\frac{1}{2}n$. Odtud dostaneme výraz pro s . Proveďte a vysvětlete.



Obr. 2

- d) Vypočítejte obdobným způsobem jako v úloze a) součet všech lichých čísel od jedné do 49.

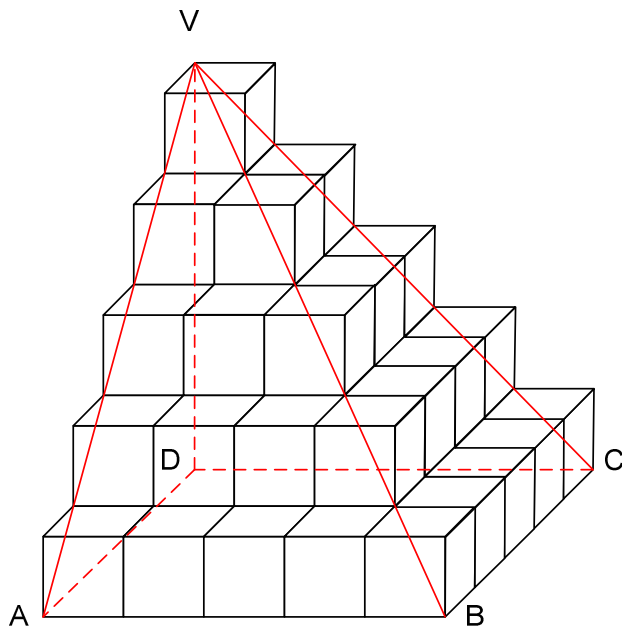
Výsledek: $2\,500 = 50^2$

Vyzkoušejte jiný součet všech lichých čísel počínající jednou. Vyšla vám opět druhá mocnina přirozeného čísla?



Příklad 11 – Součet pro $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ geometricky

Odvodíme vzorec pro součet $s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ geometrickým způsobem. Užijeme k tomu jednotkové krychle srovnané do tělesa tvaru „schodovitého jehlanu“, jednotlivé vrstvy představují sčítance, objem útvaru je součet s (na obr. 3 pro $n = 5$).



Obr. 3

- a) Vypočítáme objem tělesa jinak. Těleso se skládá z jehlanu $ABCDV$, dále z částí krychlí s tělesovou úhlopříčkou na hraně BV a z částí krychlí „nad“ stěnami ABV a BCV

jehlanu $ABCDV$. Objem jehlanu $ABCDV$ je $\frac{1}{3}n^3$, každá krychle na hraně BV přechází jehlan $ABCDV$ objemem $\frac{2}{3}$, celkem $\frac{2}{3}n$. Každá další přecházející krychle ve stěnách ABV a BCV má vně jehlanu $ABCDV$ objem $\frac{1}{2}$, takových krychlí je celkem $n(n-1)$, jejich celkový objem navíc je $\frac{1}{2}n(n-1)$. Z toho dostaneme, že

$$s = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{2}{3}n.$$

Vysvětlete podrobně pro $n = 5$.

- b) Vzorec pro s lze psát ve tvaru $s = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$. Přesvědčte se o tom.
- c) Vypočítejte součet s pro $n = 6$ podle vzorce z úlohy b), potom bezprostředním sčítáním.
- Výsledek: $s = 91$

17. Neobvyklé geometrické útvary

Uvedeme několik útvarů [2], ve školské matematice neobvyklých, složených z oblouků kružnic podle starší učebnice geometrie pro 2. stupeň ZŠ. Cílem jsou konstrukce, které využívají toho, že bod dotyku dvou kružnic leží na jejich středné nebo že střed kružnice leží na ose tětiny příslušné kružnice. Navíc lze některé z těchto úloh doplnit požadavkem na výpočet poloměru kružnice pomocí Pythagorovy věty.

Analýza těchto situací a následné rýsování těchto útvarů se může hodit v odpovídajících ročnících ZŠ a nižšího gymnázia jako vhodný prostředek k rozvíjení matematických dovedností a klíčových kompetencí.

Příklad 1

Útvar $ABCDEF$ (obr. 1) je osově souměrný podle přímky AD a skládá se ze čtyř oblouků kružnic. V krajních bodech B, C, E, F oblouků se kružnice dotýkají. Oblouk FAB je polokružnice s poloměrem 3 cm, poloměr oblouku CDE je 1 cm, $|AD| = 10$ cm.

- Sestrojte útvar $ABCDEF$.
- Vypočítejte poloměry oblouků BC a EF .

Řešení.

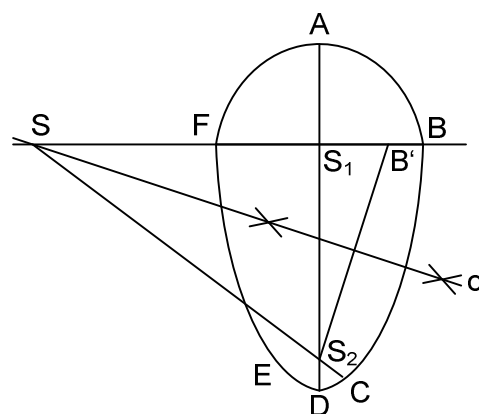
- Rozbor:** Označme S_1, S_2 a S středy kružnic příslušných po řadě oblouků FAB, EDC a BC .

$$|BS| = |SC| = |SS_2| + |S_2C| = |SB'| + |B'B|, B' \in BF, |BB'| = 1 \text{ cm}$$

Čtyřúhelník BCS_2B' je rovnoramenný lichoběžník, $BC \parallel B'S_2$. Bod S leží na ose úsečky BC (nebo $B'S_2$), $S = o \cap \leftrightarrow BF$.

Konstrukce:

- $AD, |AD| = 10$ cm
- $S_1, S_1 \in AD, |AS_1| = 3$ cm
- $S_2, S_2 \in AD, |AS_2| = 9$ cm
- FB, FB je kolmé $AD, S_1 \in FB, |FS_1| = |S_1B|$
- $B', B' \in BF, |BB'| = 1$ cm
- o, o : osa $B'S_2$
- $S, S = o \cap \leftrightarrow BF$
- $C \in \leftrightarrow SS_2 \cap k_2(S_2; 1 \text{ cm})$
- $E, O (\leftrightarrow AD): C \rightarrow E$
- útvar $ABCDEF$



Obr. 1

- Vypočítáme poloměr $|SC|$ oblouku BC (poloměr oblouku EF je stejný), $|SC| = |SS_2| + |S_2C|$. Trojúhelník SS_1S_2 je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu S_1 , $|SC| = x$ cm. Pak $|SS_2| = (x - 1)$ cm, $|SS_1| = (x - 3)$ cm, $|S_1S_2| = 6$ cm.

$$\text{Podle Pythagorovy věty dostaneme } 6^2 + (x - 3)^2 = (x - 1)^2$$

$$x = 11$$

Poloměr oblouku BC je 11 cm.

Příklad 2

Útvar $KLMN$ (obr. 2) je osově souměrný podle přímky KM , $|KM| = 12$ cm, a skládá se ze tří oblouků kružnic, které se dotýkají v koncových bodech K, L, N . Poloměry oblouků KL a KN jsou 6 cm.

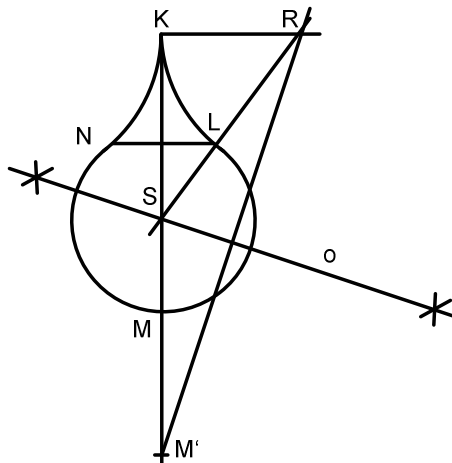
- Sestrojte útvar $KLMN$.
- Vypočítejte poloměr oblouku LMN .

Řešení:

- a) *Rozbor:* Oblouk KL je částí kružnice $k_1(R, 6 \text{ cm})$, KR je kolmé KM . Nechť S ($S \in KM$) je střed kružnice $k(S, |SM|)$, její částí je oblouk LMN . Bod $M' \in \rightarrow SM$, $|MM'| = |LR| = 6 \text{ cm}$, $|SM'| = |RS|$, $|KM'| = |KM| + |MM'| = 18 \text{ cm}$. Bod S leží na ose úsečky $M'R$.

Konstrukce:

1. KM , $|KM| = 12 \text{ cm}$
2. R , KR je kolmé KM , $|KR| = 6 \text{ cm}$
3. M' , $M' \in \rightarrow KM$, $|KM'| = 18 \text{ cm}$
4. o , o : osa $M'R$
5. S , $S = o \cap \leftrightarrow KM$
6. $L = RS \cap k_1(R, 6 \text{ cm})$
7. N , $O (\leftrightarrow KM)$: $L \rightarrow N$
8. útvar $KLMN$



Obr. 2

- b) Trojúhelník RKS je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu K . Označíme $|SL| = x \text{ cm}$, pak
 $|RS| = (x + 6) \text{ cm}$, $|KS| = (12 - x) \text{ cm}$. Užitím Pythagorovy věty dostaneme

$$6^2 + (12 - x)^2 = (x + 6)^2$$

$$x = 4$$

Poloměr oblouku LMN je 4 cm.

Příklad 3

Útvar $ABCDE$ (obr. 3) je složen z oblouků kružnic, oblouk AB je polokružnice se středem D , v bodech A, B, C, D, E se kružnice dotýkají, $|AB| = 12 \text{ cm}$, poloměry oblouků CD a DE , jsou 2 cm.

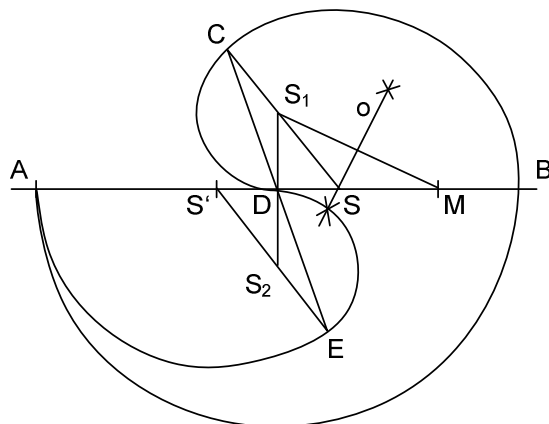
- a) Sestrojte útvar $ABCDE$.
- b) Vypočítejte poloměry oblouků AE a BC .

Řešení

- a) *Rozbor:* Označme po řadě středy kružnic příslušných k obloukům CD a DE písmeny S_1 a S_2 . S_1S_2 je kolmé, D je střed S_1S_2 . Nechť S je střed kružnice příslušné k oblouku BC , pak $S \in BD$, $|SB| = |SC|$, $|SS_1| = |SM|$, $M \in BS$, $|BM| = 2 \text{ cm}$, $S \in o$ (o je osa S_1M).

Konstrukce:

1. AB , $|AB| = 12 \text{ cm}$
2. D , D : střed AB
3. S_1S_2 , S_1S_2 je kolmé AB , D : střed S_1S_2
4. M , $M \in BD$, $|BM| = 2 \text{ cm}$
5. o , o : osa S_1M
6. S , $S = o \cap BD$
7. C , $C = \rightarrow SS_1 \cap k(S, |SB|)$
8. E , $S(D)$: $C \rightarrow E$
9. AE , $S(D)$: $BC \rightarrow AE$
10. útvar $ABCDE$



Obr. 3

- b) Poloměry oblouků AE a BC jsou shodné, označme $|BS| = x$. Trojúhelník SDS_1 je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu D , $|BS_1| = (x - 2)$ cm, $|DS| = (6 - x)$ cm, $|DS_1| = 2$ cm. Užitím Pythagorovy věty dostaneme

$$2^2 + (6 - x)^2 = (x - 2)^2$$

$$x = 4,5$$

Poloměry oblouků AE a BC jsou 4,5 cm.

Příklad 4

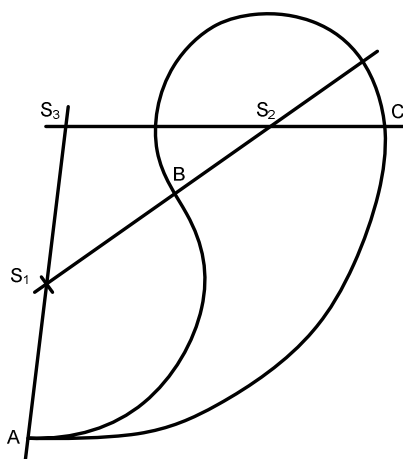
Útvar ABC (obr. 4) se skládá ze tří oblouků kružnic, v krajních bodech A, B, C se kružnice dotýkají. Poloměry oblouků AB, BC a AC po řadě jsou 3,5 cm, 2,5 cm a 7,0 cm. Sestrojte útvar ABC .

Řešení:

Rozbor: Označme po řadě středy kružnic příslušných k obloukům AB, BC a AC písmeny S_1, S_2 a S_3 , $|S_1S_2| = 6,0$ cm, $|S_2S_3| = 2,5$ cm, $|S_1S_3| = 3,5$ cm. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že body S_1, S_2, S_3 jsou vrcholy trojúhelníku. Body A, B, C leží po řadě na přímkách S_1S_3, S_1S_2, S_2S_3 .

Konstrukce:

1. $\Delta S_1S_2S_3$
2. $A, A = \rightarrow S_1S_3 \cap k_1$ (S_1 ; 3,5 cm)
3. $B, B = \rightarrow S_1S_2 \cap k_2$ (S_2 ; 2,5 cm)
4. $C, C = \rightarrow S_3S_2 \cap k_3$ (S_3 ; 7,0 cm)
5. útvar ABC



Obr. 4

Literatura:

- [1] ČECH, E. *Geometrie pro IV. třídu středních a měšťanských škol*. Praha: JČSMF, 1948. str. 71.
- [2] HOUSKA, J. Neobvyklé geometrické útvary podle starší učebnice. *Matematika - fyzika - informatika*. 2000/2001, roč. 10, č. 1, s. 6–10.

18. Úlohy na útvary se stejným obsahem

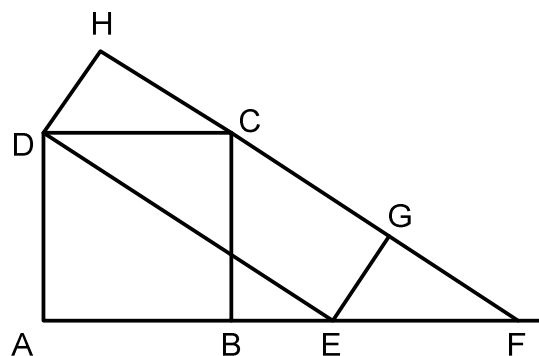


Ve starších učebnicích bývaly oblíbené úlohy „na rovnost obsahů dvou útvarů“ nebo „na proměny obrazců“, které vhodně navozují schopnost „vidět v geometrii“. Cílem článku je připomenout několik takových úloh podle učebnice Eduarda Čecha [1]. Některé z těchto námětů lze nalézt již v Euklidových Základech. Náměty motivují žáky k nalézání vhodného řešení problémů a k věcné argumentaci. [2]

První úloha využívá toho, že obsahy dvou rovnoběžníků, které mají shodné základny a shodné výšky, se rovnají.

Příklad 1

Na obr. 1 je narysován čtverec $ABCD$ a obdélník $DEGH$, bod E leží na polopřímce AB , bod C je vnitřním bodem úsečky HG . Dokažte, že při libovolné poloze bodu E na polopřímce BF je obsah obdélníku $DEGH$ roven obsahu čtverce $ABCD$.



Obr. 1

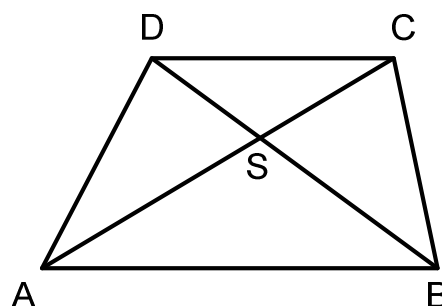
Řešení: Obsah čtverce $ABCD$ označíme $S(ABCD)$, podobně budeme značit obsahy dalších rovinných útvarů. Máme dokázat, že $S(ABCD) = S(DEGH)$.

1. $EF \parallel CD$, $DE \parallel FC$, $EFCD$ je rovnoběžník, $|EF| = |CD| = |AB|$
2. $|AD| = |BC|$, BC je výška rovnoběžníku $EFCD$ k základně EF
3. $S(ABCD) = S(DEFC)$
4. $|ED| = |GH|$, EG je výška v rovnoběžníku $EFCD$ k základně FC
5. $S(EFCD) = S(DEGH)$
6. $S(ABCD) = S(DEGH)$

Úloha: $|AB| = 6$ cm, $|AE| = 8$ cm. Vypočítejte $|EG|$. **Výsledek:** $|EG| = 3,6$ cm.

Další dvě úlohy využívají toho, že v každém lichoběžníku $ABCD$, $AB \parallel CD$, se obsahy trojúhelníků ADS a BCS rovnají ($S = AC \cap BD$), obr. 2.

Důkaz: $S(ABC) = S(ABD)$
 $S(ADS) = S(ABD) - S(ABS) = S(ABC)$
 $- S(ABS) = S(BCS)$



Obr. 2

Příklad 2

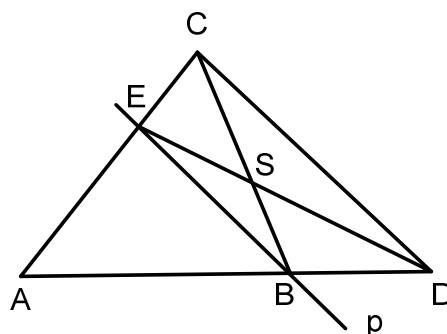
Je dán trojúhelník ABC a bod D na polopřímce AB za bodem B . Sestrojte trojúhelník ADE takový, že bod E leží na přímce AC a přitom se obsahy trojúhelníků ABC a ADE rovnají.

Konstrukce (obr. 3):

1. $p, p \parallel CD, B \in p$
2. $E, E = p \cap \rightarrow AC$
3. $\triangle ADE$

Důkaz správnosti konstrukce:

1. $EB \parallel CD$, $DCEB$ je lichoběžník
2. $S = ED \cap BC$, $S(BDS) = S(ECS)$
3. $S(ABC) = S(ABSE) + S(CES)$,
 $S(ADE) = S(ABSE) + S(BDS)$
4. $S(ABC) = S(ADE)$



Obr. 3

Poznámka: Řešte úlohu také pro případ, že bod D je vnitřním bodem úsečky AB .

Příklad 3

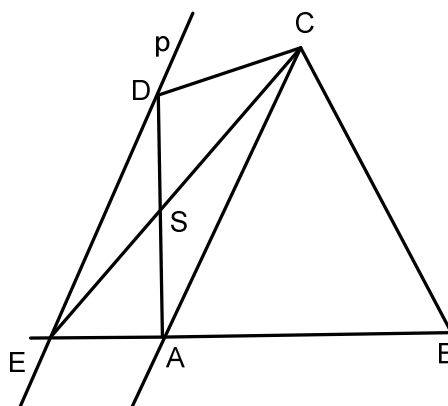
Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojte trojúhelník EBC , kde E je bodem polopřímky BA , takový, aby se obsah trojúhelníku EBC rovnal obsahu čtyřúhelníku $ABCD$.

Konstrukce (obr. 4):

2. $p, p \parallel AC, D \in p$
3. $E, E = p \cap \leftrightarrow AB$
4. $\triangle EBC$

Důkaz správnosti konstrukce:

1. $AC \parallel DE$, $ACDE$ je lichoběžník
2. $S = AD \cap EC$, $S(EAS) = S(CDS)$
3. $S(EBC) = S(ABCS) + S(EAS)$,
 $S(ABCD) = S(ABCS) + S(CDS)$
4. $S(ABCD) = S(EBC)$



Obr. 4

Při řešení následující úlohy využijeme navíc skutečnosti, že těžnice trojúhelníku dělí tento trojúhelník na dva trojúhelníky se stejným obsahem.

Příklad 4

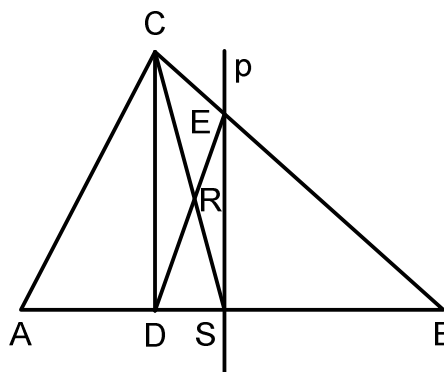
Uvnitř strany AB trojúhelníku ABC leží bod D , který není středem AB . Sestrojte úsečku DE , která rozdělí trojúhelník ABC na dvě části se stejným obsahem.

Řešení:

Bod S je střed úsečky AB , zvolme umístění bodu D na úsečce AS (obr. 5).

Konstrukce:

1. těžnice CS
2. $p, p \parallel CD, S \in p$
3. $E, E = p \cap BC$
4. DE



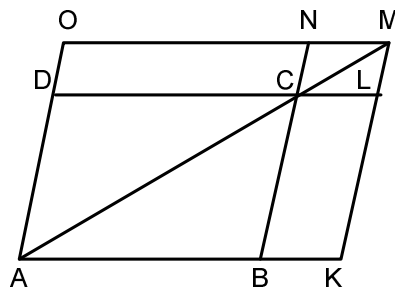
Obr. 5

Důkaz správnosti konstrukce:

1. $S(ASC) = S(BSC)$
2. $ES \parallel CD$, $CDSE$ je lichoběžník
3. $R = CS \cap DE$, $S(DSR) = S(ECR)$
4. $S(ADEC) = S(ADRC) + S(ECR) = S(ADRC) + S(DSR) = S(BSC) = S(BERS) + S(ECR) =$
 $= S(BERS) + S(DSR) = S(BDE) = \frac{1}{2} S(ABC)$

Příklad 5

Na obr. 6 jsou $ABCD$, $AKMO$, $BKLC$ a $DCNO$ rovnoběžníky. Dokažte, že obsah rovnoběžníku $AKLD$ se rovná obsahu rovnoběžníku $ABNO$.



Obr. 6

Řešení:

1. Obsahy shodných trojúhelníků se rovnají, přitom $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (sss), $\triangle AKM \cong \triangle MOA$ (sss), $\triangle CLM \cong \triangle MNC$ (sss).
2. $S(BKLC) = S(AKM) - (S(ABC) + S(CLM)) = S(MOA) - (S(CDA) + S(MNC)) = S(DCNO)$.
3. $S(ABNO) = S(ABCD) + S(DCNO) = S(ABCD) + S(BKLC) = S(AKLD)$.

Výsledek úlohy 5 využijeme k řešení tohoto problému:

Je dán rovnoběžník $AKLD$. Sestrojte rovnoběžník $ABNO$ se stranou AB , který má s rovnoběžníkem $AKLD$ shodný vnitřní úhel DAK a stejný obsah. ($|AB|$ může být menší nebo větší než $|AK|$.)

Poznámka.

Tvrzení dokázané v úloze 5 platí speciálně pro obdélníky. Tímto způsobem můžeme „proměnit čtverec na obdélník“ téhož obsahu, je-li dána jedna strana obdélníku, ne však obdélník na čtverec.

Závěrem ještě úloha na procvičení.

Příklad 6

Vně rovnoběžníku $ABCD$ je zvolen bod P . Sestrojte přímku procházející bodem P , která rozdělí rovnoběžník $ABCD$ na dvě části se stejnými obsahy.

Návod k řešení: Úlohu snadno vyřešíme, když si uvědomíme, že každá přímka, která prochází středem rovnoběžníku, má požadovanou vlastnost.

Zjednodušeně se říkává, že matematika je umění odpovídat na otázky „jak“ a „proč“ a přitom odpověď na druhou otázku je důležitější. Předložené příklady to dobře demonstrují.

Literatura:

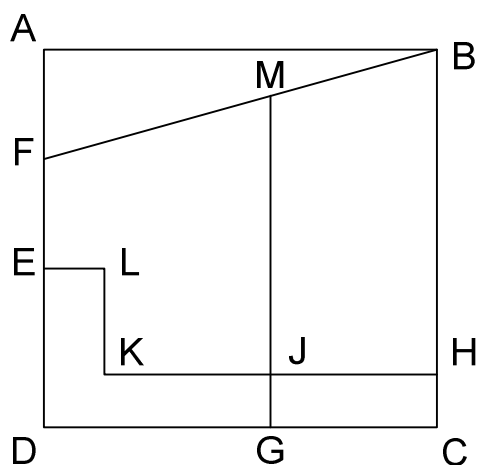
- [1] ČECH, E. *Geometrie pro třetí třídu středních škol*. Praha: SPN, 1953, str. 23–29.
- [2] HOUSKA, J. Úlohy na útvary se stejným obsahem. *Matematika - fyzika - informatika*. 2000/2001, roč. 10, č. 6, s. 330–334.

19. Dvě záhady o čtverci a několik dalších úloh

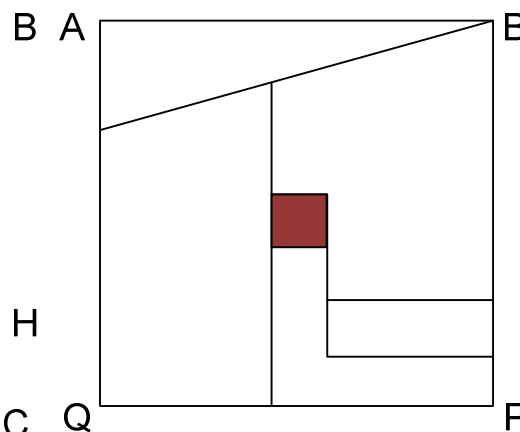
Většina učitelů matematiky má v zásobě řadu úloh různé náročnosti, které ve vhodné situaci pedagogicky využívá. Nabízíme několik takových úloh [1] (vhodných již pro 2. stupeň ZŠ a nižší gymnázia jako tzv. brainstorming), které mohou tuto zásobu obohatit. Prvé dvě se týkají zdánlivé změny obsahu při rozložení obrazce na části a pokusu o jeho složení, které dobře ukazují odlišnost geometrie (matematiky) od manipulace s reálnými modely.

Příklad 1

Čtverec $ABCD$ se stranou 7 cm je rozdělen na trojúhelník ABF , lichoběžník $JHBM$, obdélník $GCHJ$ a dva šestiúhelníky $DGJKLE$ a $ELKJMF$ podle obr. 1a, $|AF| = 2$ cm, $|GC| = 3$ cm, $|HC| = |EL| = 1$ cm, $|EF| = 2$ cm. Šestiúhelník $DGJKLE$ má každé dvě sousední strany k sobě kolmé. Rozdělte čtverec $ABCD$ na popsanych pět částí a složte je podle obr. 1b. Jak to, že „přibyl“ 1 cm^2 ? (Námět je vhodné realizovat rozstřiháním a opětným složením čtverce z papíru.)



Obr. 1a



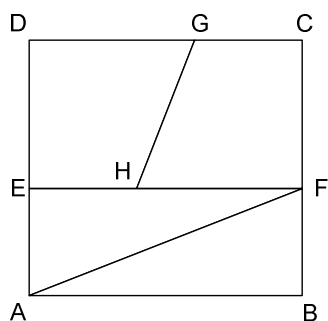
Obr. 1b

Řešení:

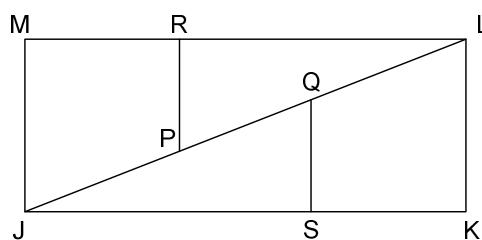
Jestliže vypočítáme (pomocí podobnosti) délku svislé strany „čtverce“ z obr. 1b, zjistíme, že tato délka $|AQ| = 7 \frac{1}{7}$ cm. Takže útvar $ABPQ$ není čtverec, ale obdélník. Obsah čtverce $ABCD$ na obr. 1a je 49 cm^2 , zatímco obsah obdélníku $ABPQ$ na obr. 1b je 50 cm^2 .

Příklad 2

Na obr. 2a je narysován čtverec $ABCD$, $|AB| = 21$ cm, který je rozdělen příčkou EF , $EF \parallel AB$, na dva obdélníky: obdélník $ABFE$, $|BF| = 8$ cm, a $EFCD$, $|CF| = 13$ cm. Obdélník $EFCD$ je rozdělen na dva shodné pravoúhlé lichoběžníky: lichoběžník $HFCG$, $HF \parallel CG$, a lichoběžník $EHGD$, $EH \parallel DG$, $|EH| = |CG| = 8$ cm, $|FH| = |DG| = 13$ cm, oba s výškami 13 cm. Obdélník $ABFE$ je rozdělen úhlopříčkou AF na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Z uvažovaných čtyř částí čtverce $ABCD$ se pokuste složit obdélník $JKLM$ podle obr. 2b. Obsah čtverce $ABCD$ na obr. 2a je 441 cm^2 , obsah obdélníku $JKLM$ je $34 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} = 442 \text{ cm}^2$, takže obsah obdélníku $JKLM$ na obr. 2a je o 1 cm^2 větší než je obsah čtverce $ABCD$ na obr. 2a. Kde je chyba?



Obr. 2a



Obr. 2b

Řešení: Výpočtem zjistíme, že (obr. 2b) $\frac{|QS|}{|JS|} < \frac{|LK|}{|JK|}$, trojúhelníky JSG a JKL nejsou podobné, body J, P, Q, L neleží na téže přímce. Čtyřúhelník $JQLP$ je „úzký“ rovnoběžník s obsahem 1 cm^2 , o který je obsah obdélníku $JKLM$ na obr. 2b větší než obsah čtverce $ABCD$ na obr. 2a. (Na vyšším stupni střední školy lze obsah rovnoběžníku $JKLM$ vypočítat přímo z délek dvou sousedních stran a velikosti vnitřního úhlu.)

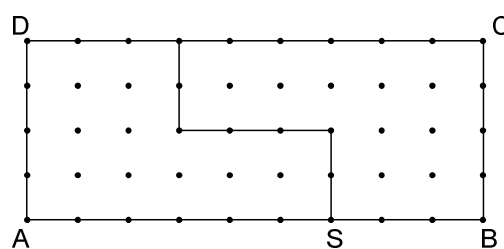
Další úlohy se také liší od našich školských úloh a jsou vesměs převzaty z didaktických materiálů USA [3]. Při řešení následujících úloh budeme využívat čtvercovou síť.

Příklad 3

Rozdělte obdélník $ABCD$, $|AB| = 9 \text{ cm}$, $|BC| = 4 \text{ cm}$, na dvě části tak, aby jejich složením vznikl čtverec se stejným obsahem jako původní obdélník $ABCD$.

Řešení je uvedeno na obr. 3.

Poznámka. Řešení úlohy 3 se usnadní, když si načrtneme zmíněný obdélník ve čtvercové síti, její uzlové body jsou vrcholy čtverečků o straně 1 cm .

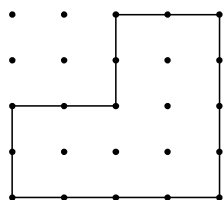


Obr. 3

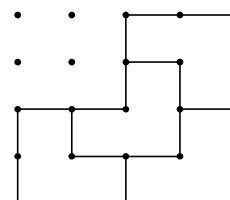
Příklad 4

Na obr. 4a je narýsován útvar, který se skládá ze tří shodných čtverců. Rozdělte tento útvar na čtyři navzájem shodné části.

Řešení je uvedeno na obr. 4b. (Úloha je značně náročnější, pokud nepoužijeme ke znázornění čtvercovou síť.)



Obr. 4a



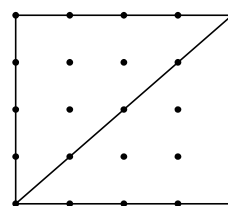
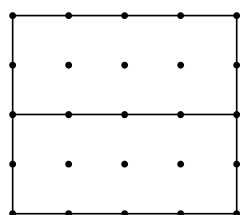
Obr. 4b

Příklad 5

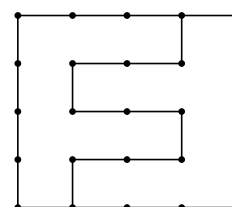
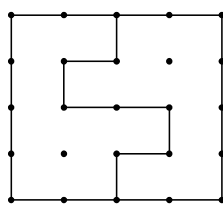
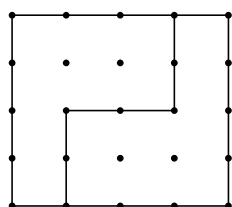
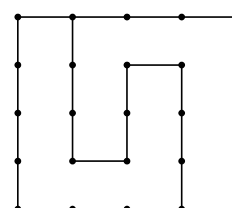
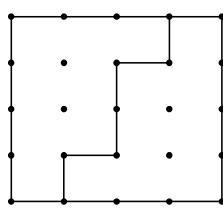
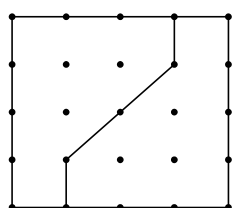
Ve čtvercové síti je narýsován čtverec (s vrcholy v mřížových bodech) se stranou délky 5 cm . Kolik způsobů je možno tento čtverec rozdělit na dvě navzájem shodné části úsečkou nebo lomenou čarou s vrcholy v mřížových bodech?

(Dva způsoby rozdělení pokládáme za odlišné, právě když lomené čáry, které tvoří společnou hranici částí, nejsou shodné.)

Řešení: Vedle dvou triviálních způsobů rozdělení (obr. 5a) lze nalézt ještě dalších šest způsobů (obr. 5b), takže existuje celkem osm takových rozdělení.



Obr. 5a

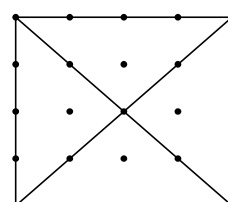
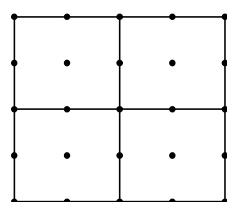


Obr. 5b

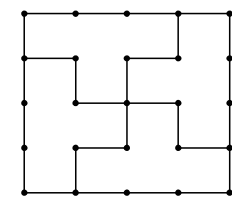
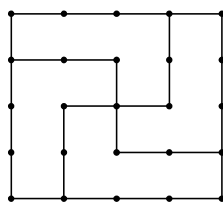
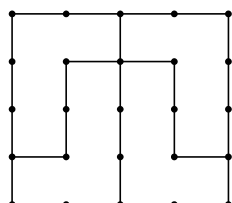
Příklad 6

Kolika způsoby lze rozdělit čtverec z úlohy 5 stejným způsobem jako v předchozím případě na čtyři navzájem shodné části?

Řešení: Vedle dvou triviálních způsobů rozdělení (obr. 6a) existují ještě tři další možnosti (obr. 6b), takže celkem máme pět způsobů.



Obr. 6a



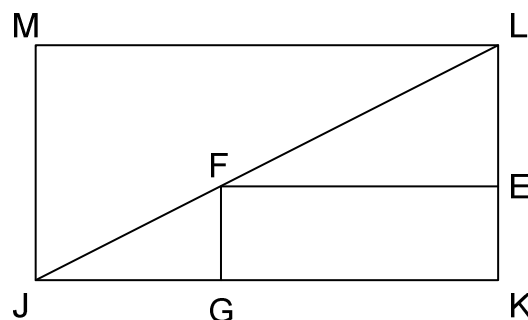
Obr. 6b

Poznámka. Povšimněte si, že v prvním a druhém způsobu na obr. 6b se čtverec rozkládá v obou případech na shodné části, z nichž však je odlišně složen. Hraniční lomené čáry nejsou shodné.

Závěrem připojujeme ještě jednu úlohu bez řešení, která je obdobou problému 2. a příklad 8.

Příklad 7

Na obr. 7 je narysován obdélník $ABCD$, $|AB| = 13$ cm, $|BC| = 8$ cm, rozdělený úhlopříčkou AC na dva pravoúhlé trojúhelníky ABC , ACD . Do trojúhelníku ABC je vepsán menší obdélník $GBEF$, $|BG| = 8$ cm, $|BE| = 3$ cm. Obsah obdélníku $ABCD$ je 104 cm², součet obsahů obdélníku $GBEF$ a trojúhelníků AGF , FEC a ACD je však je $(24 + 7,5 + 20 + 52)$ cm² = $103,5$ cm². Vysvětlete.

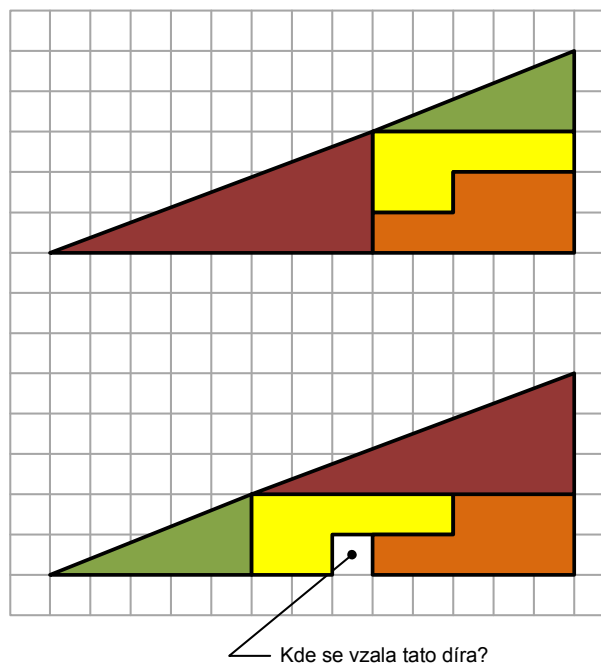


Obr. 7

Příklad 8

Oba „trojúhelníky“ na obr. 8 jsou poskládány z totožných částí. Přesto v tom spodním zbyl čtvereček volný. Jak je to možné? - <http://hadanky.chytrak.cz/>

Návod: Počítejte poměry menší a delší odvěsny v zeleném a červeném trojúhelníku, Potom ve „velkém trojúhelníku“. Zjistíte, že „velký trojúhelník“ není trojúhelník.



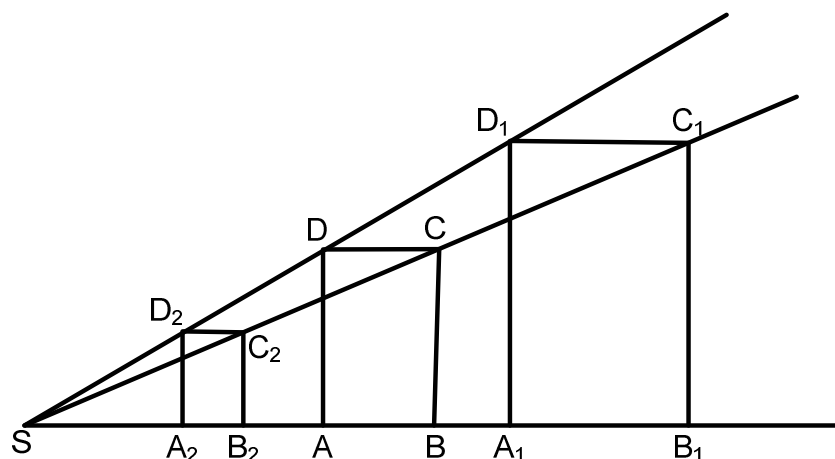
Obr. 8

Literatura:

- [1] HOUSKA, Jan. Dvě záhady o čtverci a několik dalších úloh. *Matematika - fyzika - informatika*. 2001/2002, roč. 11, č. 6, s. 328–334.

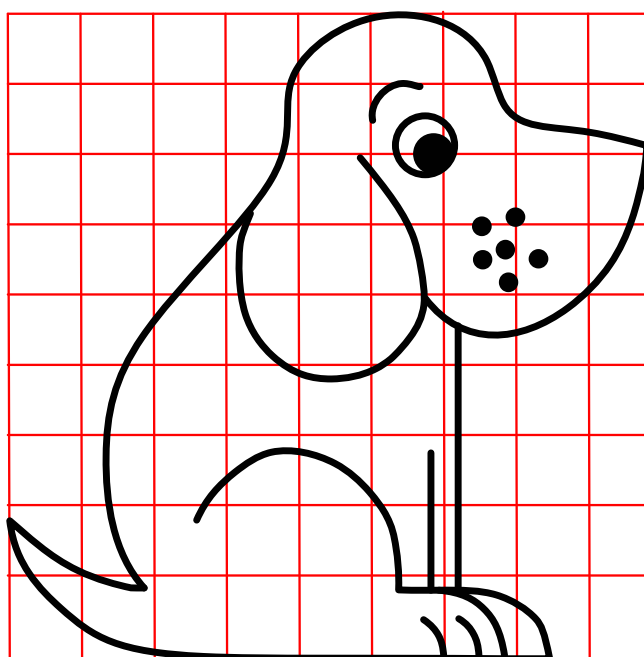
20. Transformace souřadnicové sítě, plochy

Úloha 1: Zvětšete a zmenšete jednoduchý obrázek podle vzoru na obr. 1.



Obr. 1

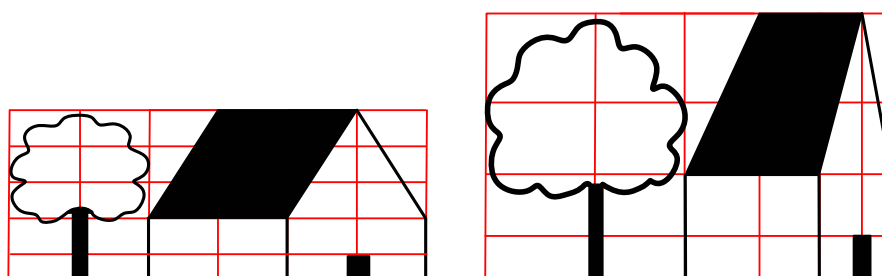
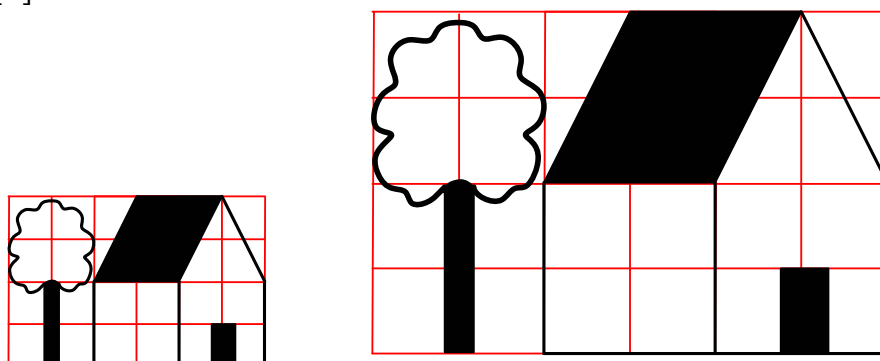
Úloha 2: Zvětšete obr. 2 pomocí čtvercové sítě. [1]



Obr. 2

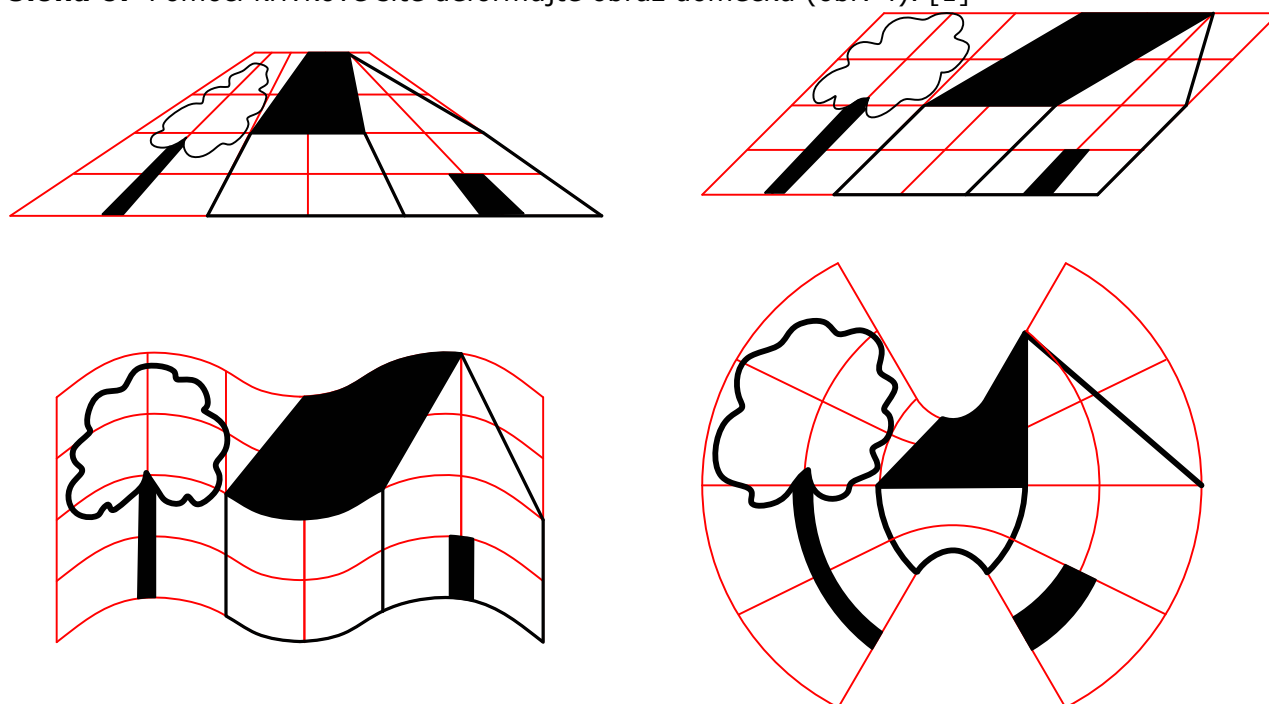
Obvyklá čtvercová síť se může změnit (transformovat) do obdélníkové nebo rovnoběžníkové sítě, síť může být též křivočará. Může ji nahradit libovolné dva systémy křivek, které se po dvou (dvojice křivek obsahuje vždy prvky z obou systémů) se protínají.

Úloha 3: Transformujte obrázek obr. 3 (dům) ze čtvercové sítě do dalších sítí podle předlohy. [1]



Obr. 3

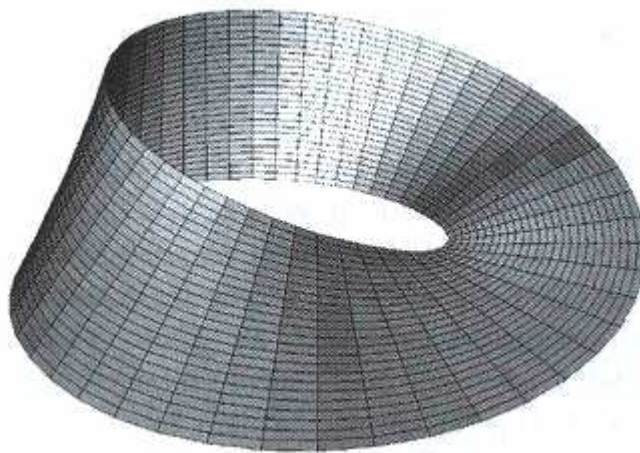
Úloha 6: Pomocí křivkové sítě deformujte obraz domečku (obr. 4). [1]



Obr. 4

Möbiův pás

Úloha 7: Vystříhněte pásek papíru, jednou jej přehněte a slepte. Dostanete plochu, která se nazývá Möbiův pás (obr. 1). Přesvědčte se čarou prostředkem pásu, že tato plocha nemá vnitřek a vnějšek.

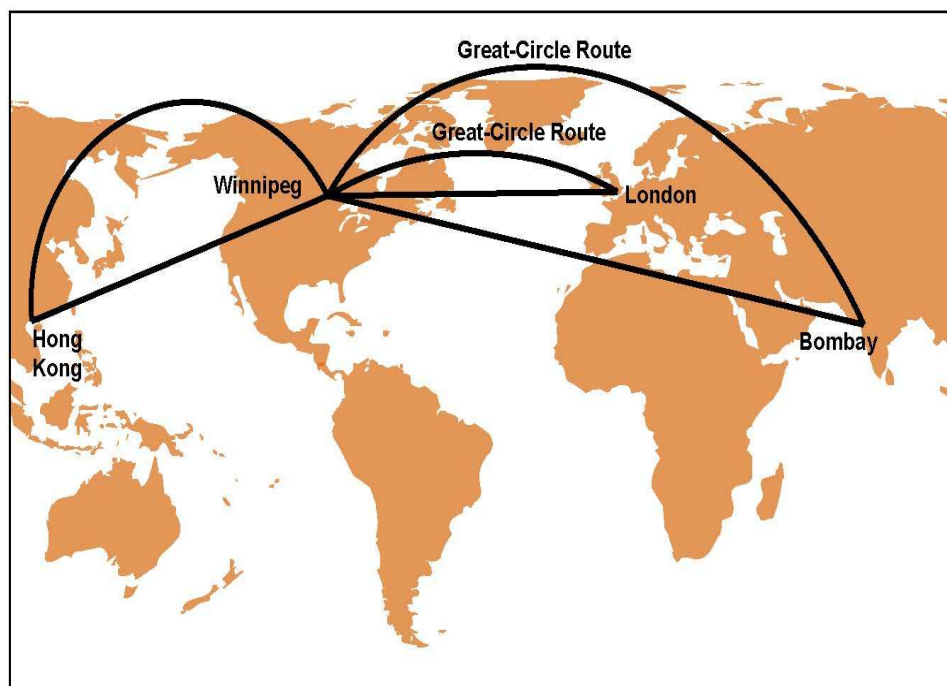


Obr. 1

Úloha 8: Rozstříhněte Möbiův pás podle čáry vedené jeho prostředkem. Co dostanete?

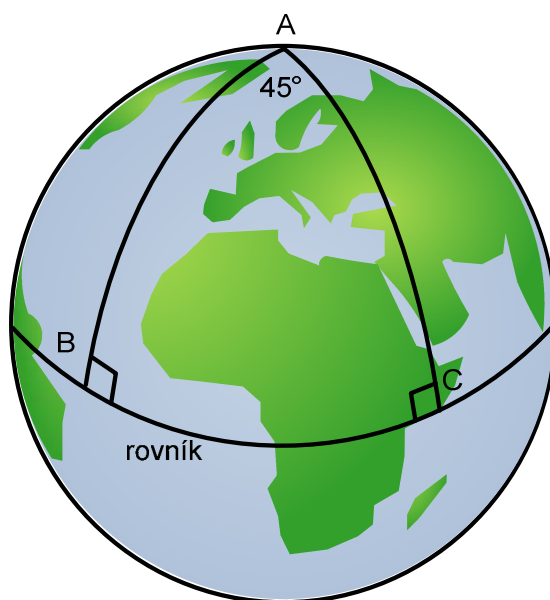
Geometrie na zeměkouli [1]

Zobrazení povrchu globu do rovinné mapy (Mercatorova projekce) může zkreslovat. Nejkratší vzdálenost dvou míst na povrchu globu určíme provázkem (je to oblouk hlavní kružnice, ta má střed ve středu globu). Na obr. 2 vidíme, že nejkratší vzdálenost na mapě (úsečka) není nejkratší vzdálenost po povrchu Země (letecké trasy).



Obr. 2

Všimněme si ještě některých zvláštností geometrie na kulové ploše. Jak jsme již viděli, místo přímek máme na kulové ploše *hlavní kružnice*. Každé dvě hlavní kružnice se však protínají ve dvou bodech, takže v geometrii na kulové ploše *neexistují rovnoběžky*. Na obr. 3 vidíme trojúhelník (sférický) ohraničený dvěma polovinami poledníků a obloukem rovníku. Součet velikostí úhlů v tomto trojúhelníku je větší než 180° . Proč?



Obr. 3

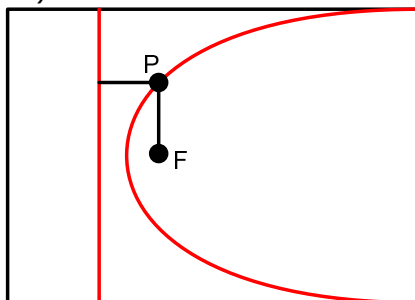
Literatura:

- [1] KELLY, B., ALEXANDER, B., ATKISON, P., WARNICA, E. *Mathematics 9*. Canada: Addison-Wesley, 1981. 438 s.
- [2] CASEY, J. Using a Surface Triangle to Explore Curvature. *Mathematics Teacher* 1994, roč. 87, č. 2, s. 69 – 77.

21. Významné křivky

Vedle kružnice se v matematice vyskytuje mnoho dalších křivek, které mají četné aplikace. Povšimneme si několik z nich. [1]

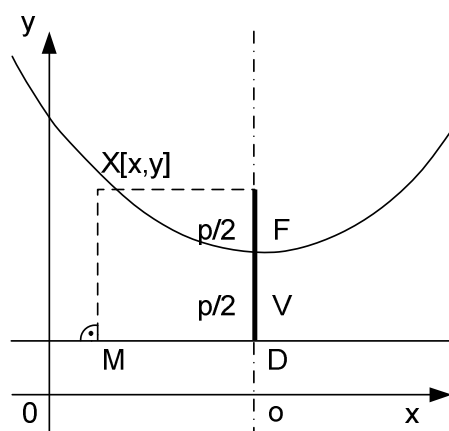
Parabola je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od dané (řídící) přímky a daného bodu (ohniska).



Obr. 1

Jinak řečeno: Parabola je množina středů všech kružnic v rovině, které procházejí daným bodem (ohniskem) a dotýkají se dané (řídící) přímky.

Konstrukce paraboly. Zvolíme-li ohnisko F a řídící přímku d , která neprochází ohniskem, můžeme pomocí pravoúhlého trojúhelníku a kružítka sestavit několik bodů paraboly. Parabola je symetrická podle osy o , která prochází ohniskem a je kolmá k řídící přímce (obr. 2).



Obr. 2

Popis paraboly:

$V[m, n]$ – vrchol paraboly o souřadnicích m, n

F – ohnisko paraboly

d – řídící přímka

o – osa paraboly

$|DF| = p$ – velikost parametru,

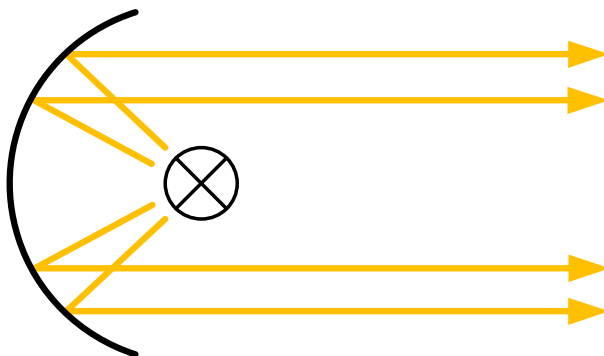
$p > 0, |DV| = |FV| = \frac{p}{2}$

$X[x, y]$ – libovolný bod náležící parabole

Na této ose leží jeden významný bod paraboly (vrchol), vysvětlíte podrobněji.

S parabolou se setkáváme v *matematice i v přírodě*. Hodíme-li kámen, jeho dráha je přibližně parabola (přesně by to platilo ve vakuu). Podobně proud vody se pohybuje po parabolické dráze.

Parabola má tu vlastnost, že paprsek vycházející z ohniska, se odráží od paraboly rovnoběžně s její osou (obr. 3). Proto mají reflektory tvar rotačního paraboloidu (tělesa vzniklého rotací paraboly kolem své osy).



Obr. 3

Úloha 1: Sestrojte graf funkce $y = x^2$.
(Grafem této funkce je parabola)

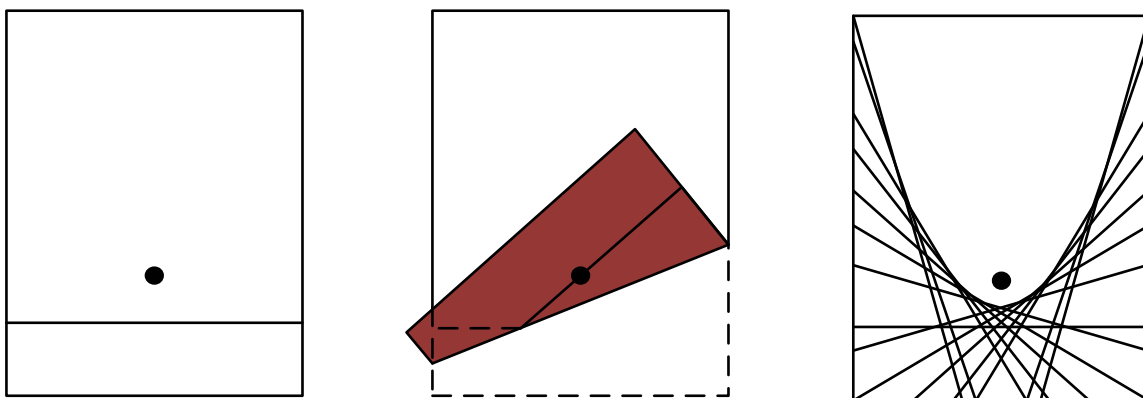
Úloha 2: Sestavte tabulku, např. pro $x = -3, -2, -1, -0,5, 0, 0,5, 1, 2, 3$.
V tomto příkladě není jasné, kde je ohnisko a řídící přímka, to je problém až pro střední školu (parametr $p = \frac{1}{2}$).

Úloha 3: Sestrojte graf funkce $y = 2x^2$. Tato parabola je užší, to právě závisí na vzdálenosti ohniska od řídící přímky (parametru $p = 1$).

Úloha 4:

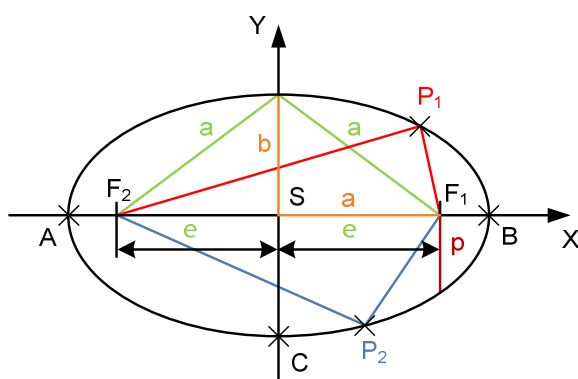
Námět k pokusu a). Sestrojte ostrý nebo pravý úhel a na každém z jeho ramen vyznačte po 1 cm díly 1, 2, 3, ..., 8. Spojte úsečkami body, z nichž jeden leží na jednom a druhý na jiném rameni: 1 a 8, 2 a 7, 3 a 6, 4 a 5. Obálkou těchto přímek je parabola.

Námět k pokusu b). Zvolte přímku p a bod F , který má od přímky p vzdálenost 6 cm. Volte body X na přímce p a konstruuje osy úseček FX (nebo přehýbejte papír tak, že přímka p prochází bodem F). Obálkou zmíněných os (přímek přehybu) je parabola.



Obr. 4

Elipsa – je množina všech bodů v rovině, které mají stálý součet vzdáleností $|AB|$ od dvou daných bodů (ohnisek) F_1, F_2 ($|AB| \geq |F_1F_2|$).

Parametry elipsy:

a – délka hlavní poloosy
 b – délka vedlejší poloosy
 F_1, F_2 – ohniska
 e – excentricita = výstřednost
 p – parametr

Obr. 5

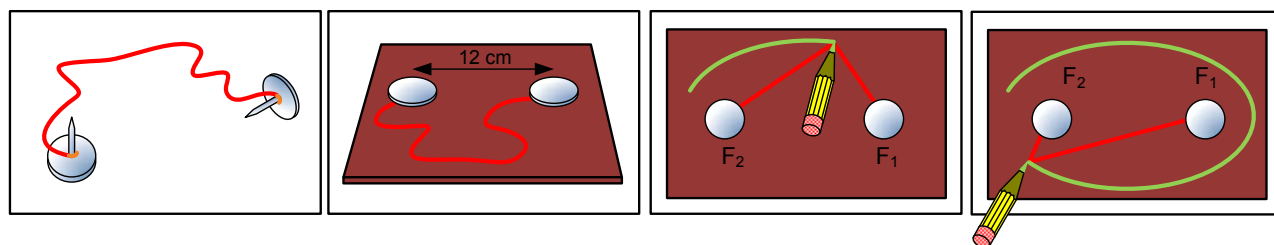
Elipsa má střed (je středově souměrná), velkou a malou poloosu $a = |AS| = |BS|$, $b = |CS| = |DS|$, které jsou k sobě kolmé. Vzdálenost $e = |F_1S| = |F_2S|$, se nazývá výstřednost (obráz. 5).

Rozmyslete si, proč platí $|AS| = |F_2D| = |F_1D| = |BS|$, $|AS|^2 = |F_2S|^2 + |DS|^2$.

Čím je výstřednost elipsy při konstantní velké poloose větší, tím je elipsa protáhlejší, čím je výstřednost menší, tím se elipsa tvarem více blíží kružnici. Můžeme říci, že kružnice je elipsa s nulovou výstředností.

Konstrukce elipsy

Elipsu můžeme konstruovat bod po bodu pravítkem a kružítkem podle uvedené definice podobně jako parabolu, rychlejší to však je pomocí provázku, který volně spojuje dva zapíchnuté špendlíky do tvrdého papíru (dřevěné tabule) v bodech F_1, F_2 , délka provázku $|AB|$, např. $|F_1F_2| = 8 \text{ cm}$, $|AB| = 10 \text{ cm}$. (Na tabuli ve třídě 10krát větší).



Obr. 6

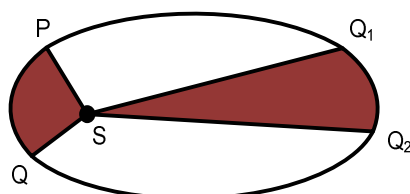
Úlohy: Sestrojte elipsu:

- $2a = |AB| = 12 \text{ cm}$, $2e = |F_1F_2| = 10 \text{ cm}$,
- $2a = |AB| = 12 \text{ cm}$, $2e = |F_1F_2| = 6 \text{ cm}$,
- $2a = |AB| = 12 \text{ cm}$, $2e = |F_1F_2| = 4 \text{ cm}$.

Pomocí Pythagorovy věty můžeme v každém případě vypočítat malou poloosu.

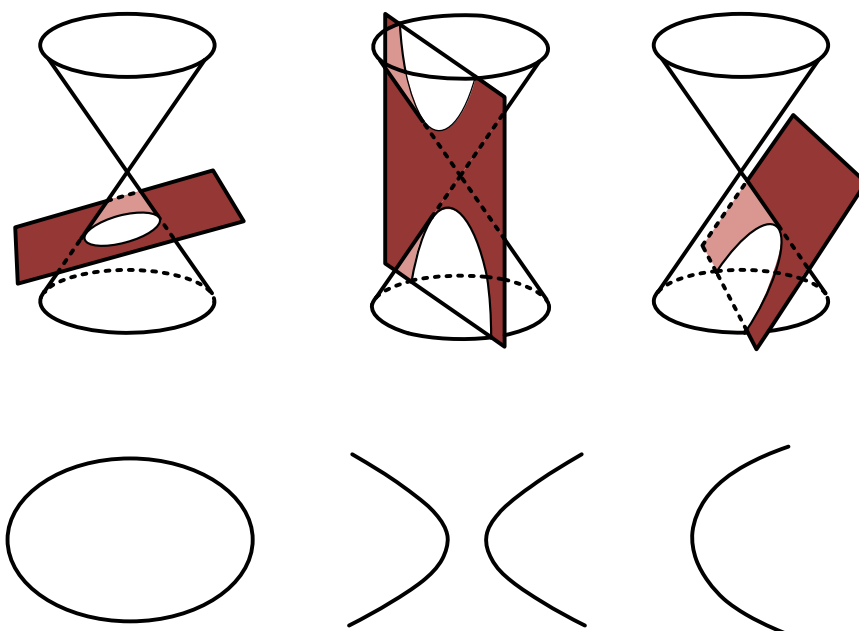
S elipsou se setkáváme např. v astronomii v souvislosti s Keplerovými zákony. Německý matematik Johann Kepler, který působil v 17. stol. v Praze, objevil, že planety (včetně Země) obíhají kolem Slunce po elipsách, přitom Slunce je v jednom z ohnisek elipsy. Nejblíže ke Slunci se nazývá přísluní, nejvzdálenější bod je odsluní. Výstřednost dráhy Země kolem Slunce je poměrně malá. (Na naší polokouli je v přísluní zima, v odsluní léto. Čím je ovlivněno střídání ročních období?)

Druhý Keplerův zákon říká, že obsahy výsečí opsaných průvodičem Země za jednotku času (např. jeden den) při oběhu kolem Slunce jsou stejné. Co z toho plyne pro rychlosti planet v přísluní a odsluní?



Obr. 7

Rovina může protnout povrch kužele (kuželovou plochu) v elipse nebo parabole, další křivkou, která takto může vzniknout, je hyperbola (má dvě větve). Hyperbola (nebo její část) je grafem funkce nepřímá úměrnost $y = \frac{k}{x}$, $x \neq 0$. Proto se těmto křivkám (včetně kružnice) říká kuželosečky (obr. 8).



Obr. 8 – elipsa, hyperbola, parabola.

Nebeská tělesa (planety, komety, meteory) se pohybují po kuželosečkách. To platí také o tělese vystřeleném do kosmu ze Země. Vysvětlete, na čem závisí kvalita kuželosečky, po níž se takové těleso pohybuje. Všechny zmíněné křivky (parabola, elipsa, hyperbola) vznikají promítáním kružnice. Situaci můžeme pozorovat, když si ve tmě posvítíme baterkou na stěnu. Vysvětlete proč.

Vysvětlete, na čem závisí při řezu kuželové plochy typ kuželosečky. Jednu z kuželoseček také dostaneme, když rovinným řezem ukrojíme šikmo válec. Kterou? Kde takový řez pozorujeme?

Jiná konstrukce bodů elipsy

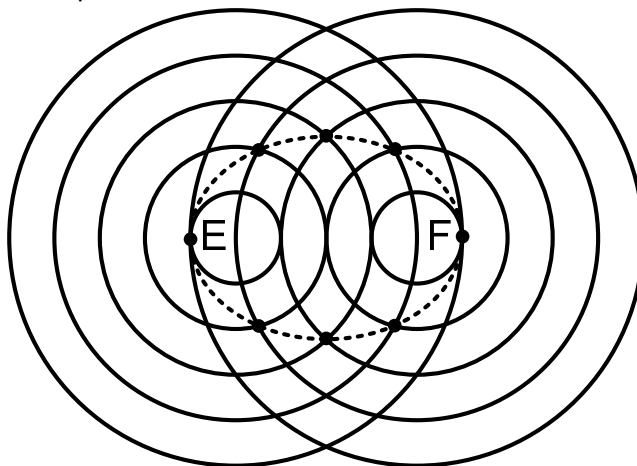
Sestrojte kružnici k (S , 5 cm) se dvěma navzájem kolmými průměry AB a CD , $|AB| = 10$ cm. Na přímkce CD sestrojte body C' , D' , jejichž vzdálenost od přímky AB je poloviční než vzdálenost bodů C , D od přímky AB . Podobně zvolte na kružnici k další body (např. X , Y) a sestrojte jejich obrazy na kolmici k průměru AB tak, že jejich vzdálenosti od AB zkrátíte na polovic. Body A , B v tomto zobrazení zůstanou na místě. Křivka, která vznikne, je

elipsa s poloosami $a = |AS| = |BS| = 5$ cm, $b = |C'S| = |D'S| = 2,5$ cm. Určete výstřednost této elipsy.

($e = 2,5\sqrt{3}$ cm)

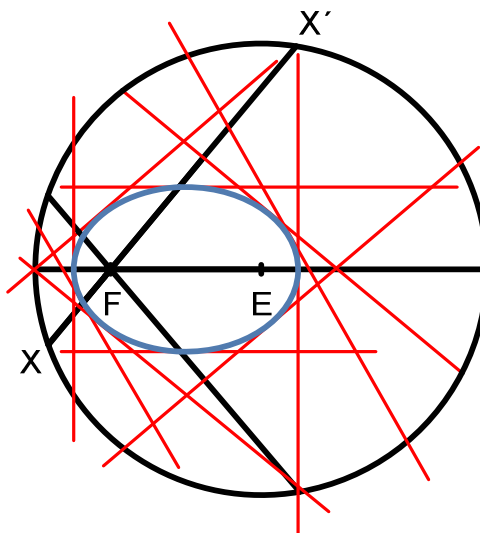
Konstrukce bodů elipsy pomocí soustředných kružnic

Zvolte dva body E, F , $|EF| = 8$ cm. Sestrojte pět soustředných kružnic se středem E a poloměry 2 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm, 10 cm. Podobně sestrojte pět soustředných kružnic s týmiž poloměry se středem F . Vyznačte všechny body, v nichž se protínají kružnice s poloměry 2 cm a 10 cm, 4 cm a 8 cm, 6 cm a 6 cm (obr. 10). Tyto body leží na elipse s ohnisky E, F . Vysvětlete proč.



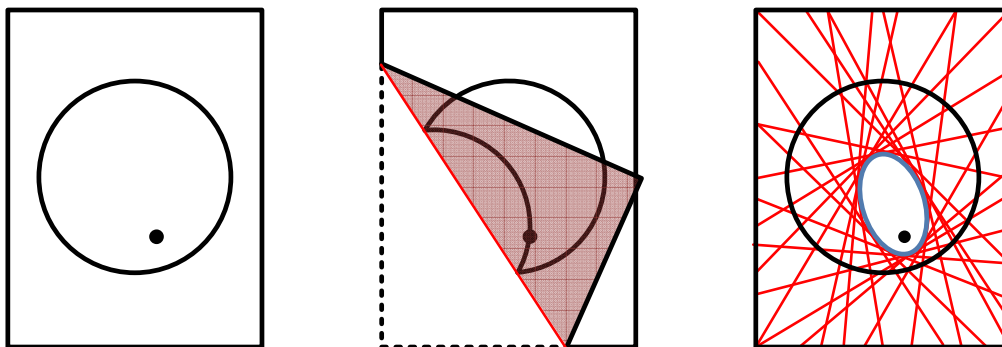
Obr. 10

Námět k pokusu. Sestrojte kružnici k (E , 6 cm). Zvolte bod F , $|EF| = 4$ cm. Sestrojte úsečku FX , $X \in k$ a její osu o . Volte několik dalších poloh bodu X , konstruujte úsečky FX a jejich osy (obr. 11). Obálkou těchto os je elipsa.



Obr. 11

Pokus lze provést přehýbáním papíru tak, že bod F zůstává na kružnici k . Pak obálkou přímek přehybu je elipsa (obr. 12).

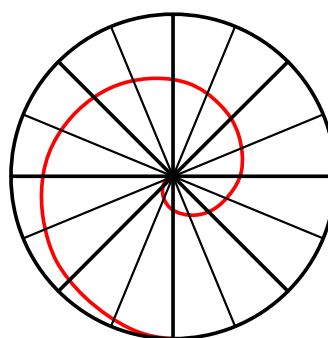


Obr. 12

Spirály

Spirály jsou křivky, které vznikají jako dráha bodu, který se pohybuje po polopřímce, která se rovnoměrně otáčí kolem svého počátečního bodu (pólu).

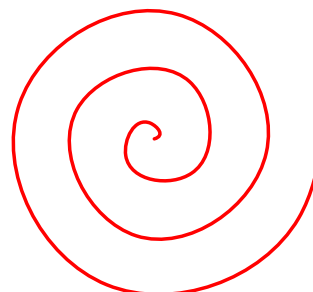
Příklad spirály: Kruh s poloměrem 6 cm rozdělíme na 16 shodných výsečí (obr. 13). Body křivky dostaneme tak, že první bod volíme na hranici kruhu a další body postupně na dalších poloměrech ve vzdálenostech 4 mm, 8 mm atd. Pak body spojíme hladkou křivkou, dostaneme spirálu. Můžeme si představit, že se po poloměru kruhu směrem ke středu pohybuje rovnoměrně brouk a přitom se kruh rovnoměrně otáčí (vždy o 22,50 za dobu, o níž brouk popoleze o 4 mm), dráha brouka vzhledem k zemi je spirála.



Obr. 13

Archimedova spirála

Vzniká tak, že vzdálenost jejího bodu od pólu je přímo úměrná velikosti úhlu otočení vytvářející polopřímky.

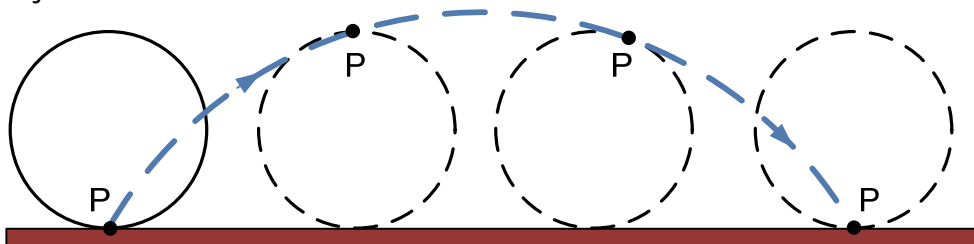


Obr. 14

Cykloida

Označme bod na plášti jízdního kola, při pohybu kola vzhledem k zemi opisuje označený bod křivku, který se nazývá cykloida (obr. 15). [2]

Cykloidu můžeme narysovat tak, že necháme kutálet po přímce kruh s označeným bodem na jeho hranici.

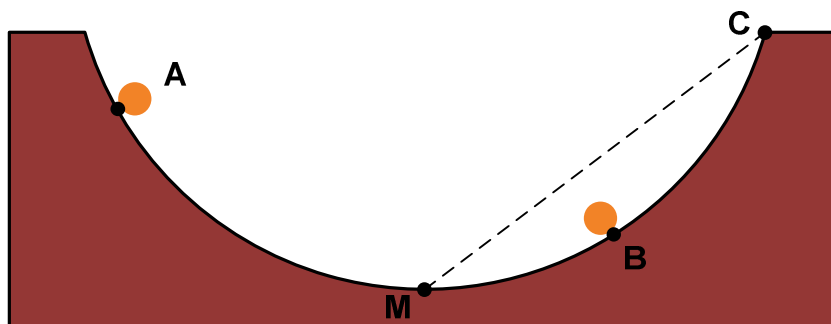


Obr. 15

Cykloida se skládá s navzájem shodných oblouků. Má mnoho významných matematických a fyzikálních vlastností. Proto byla v matematice často studována, je to jeden z objektů, na němž vznikala moderní matematika.

Fyzikální vlastnosti cykloidy:

Zvolíme-li dva body A, B na cykloidě (obrácené), které neleží na téže svislé přímce, pak časově nejkratší dráha, po níž se pohybuje hmotný bod bez tření v gravitačním poli, je cykloida (tzv. brachystochrona), obr. 16. [2]



Obr. 16

(Např. pohyb z bodu C po cykloidě do M – nejnižšího bodu obrácení cykloidy – se uskuteční za kratší dobu než po úsečce CM . Vysvětlete, proč je to možné.)

Cykloidální dráha má také tu vlastnost, že saně (kulička) vypuštěné z různých bodů cykloidy A, B, C dojedou do nejnižšího bodu M za stejný čas (tzv. tautochróna). Proč je to možné?

Pokuste se sestavit model podle obr. 16 a zmíněné vlastnosti ověřit!

Literatura:

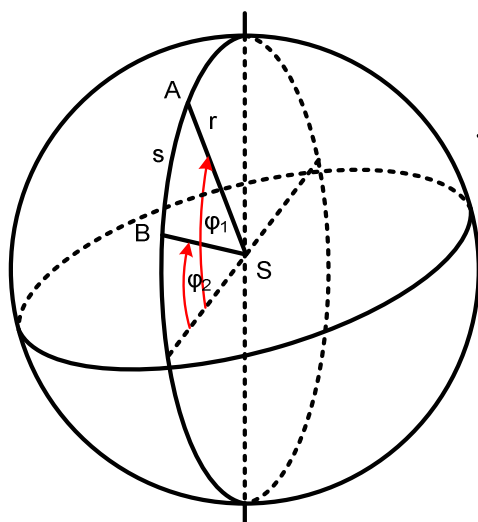
- [1] BURNS, A. G., CARLI, E. G., EGSGARD, J. C., PINKNEY, R. G., PSICA, C. *Mathematics for a modern world*. Canada: Gage Educational Publishing Limited, 1976. 598 s.
- [2] FLEENOR, C. R., EICHOLZ, R. E., O'DAFFER, P. *School Mathematics 2*. Canada: Addison-Wesley, 1974.

22. Náměty z historie měření Země a vesmíru pro výuku matematiky

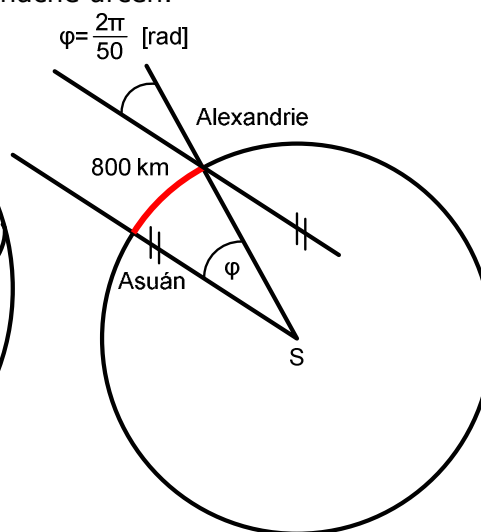


Již ve starověku lidé tušili, že Země má tvar koule. Tento názor podporovalo např. pozorování připlouvající lodi na mořském obzoru, z níž bylo nejdříve vidět stěžně a teprve potom palubu a tvar lodi; podobně zatmění Měsíce Zemí dávalo na měsíčním kotouči kruhový obrys stínu Země. Jak lze vypočítat poloměr Země? Např. tak, že známe zeměpisné šířky dvou míst $A(\varphi_1)$, $B(\varphi_2)$, na téže poledníku a stejné zemské polokouli a jejich vzdálenost měřenou po povrchu Země s . Pak pro délku poloměru Země r dostáváme $r = \frac{s}{\varphi}$, kde s je délka oblouku kružnice AB a $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$ je středový úhel příslušný k tomuto oblouku v obloukové míře (v radiánech), obr. 1.

V podstatě tímto způsobem odhadl délku poloměru Země před více než 2000 lety řecký filozof Eratosthenes. Eratosthenes, současník Archimedův, působil ve 3. století před n. l. v Alexandrii (v dnešním Egyptě) a dozvěděl se jako zvláštnost, že na jih od Alexandrie, poblíž nynějšího Asuánu, jsou hluboké studně, do nichž dopadají sluneční paprsky jednou v roce až na dno. V ten den bylo totiž Slunce nad studněmi v poledne v zenitu. Bylo to právě 21. června – v době tzv. letního slunovratu; dané místo leželo právě na obratníku Raka. Eratosthenes změřil v tuto dobu úhel slunečních paprsků od svislého směru v Alexandrii, a tím vlastně vzhledem k rovnoběžnosti slunečních paprsků zjistil velikost zmíněného středového úhlu na hlavní kružnici Země (obr. 2). Vyšla mu přibližně $1/50$ plného úhlu. Vzhledem k tomu, že vzdálenost obou míst je přibližně 800 km, dospěl Eratosthenes – zčásti díky vyrovnaní nepřesnosti změřených dat – k překvapivě správnému výsledku. (Délka poloměru Země je 6 371 km.) Poznamenejme, že Eratosthenes samozřejmě počítal v jiných jednotkách délky než v kilometrech (v tzv. stadiích), převodní vztah na km není jednoznačně určen.



Obr. 1

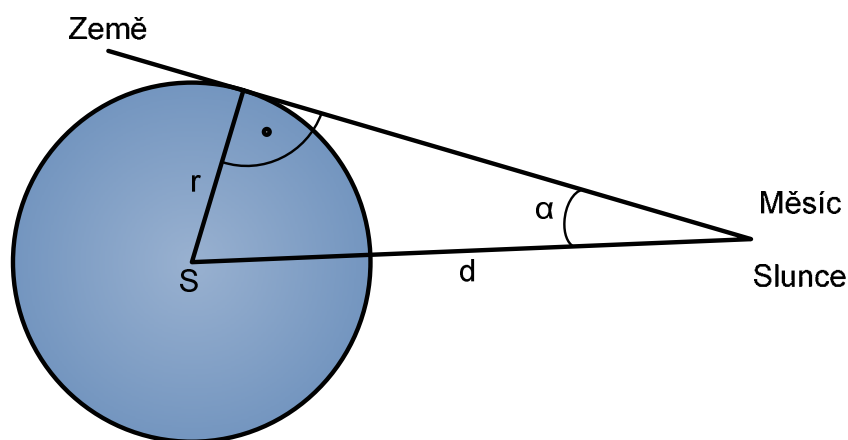


Obr. 2

Vzdálenost Měsíce nebo Slunce lze vypočítat pomocí tzv. paralaxy, velikosti zorného úhlu zemského poloměru pozorovaného v kolmém směru ze vzdálenosti Měsíce nebo Slunce. V principu by ji bylo možno určit podle obr. 3 (z pravoúhlého trojúhelníku na obr. 3 lze definovat paralaxu přesněji pomocí $\sin \alpha$, pro velmi malé úhly v obloukové míře jsou však hodnoty prakticky stejné.) Paralaxa Měsíce je 57 úhlových minut, paralaxa Slunce asi 8,8 úhlových vteřin. Převedením těchto hodnot do obloukové míry

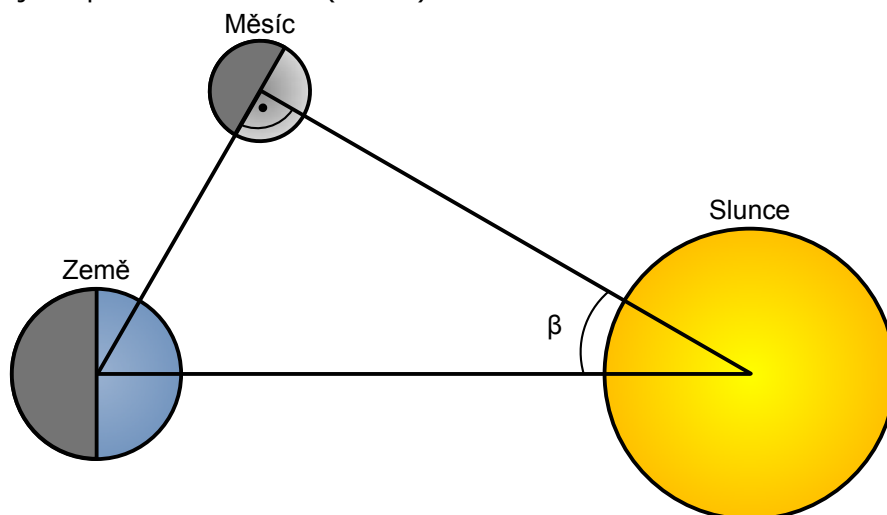
můžeme snadno odhadnout vzdálenosti d Země-Měsíc a Země-Slunce užitím vzorce

$$d = \frac{r}{\alpha}.$$



Obr. 3

O odhad uvedených vzdáleností se pokoušel ještě před Eratosthenem jiný starořecký vědec *Aristarchos ze Samu* (zastávce heliocentrického systému ve starověku), který žil asi o jednu generaci dříve než Eratosthenes. Vzhledem k tomu, že paralaxy Měsíce a Slunce jsou velmi malé, byly jeho odhady hodně nepřesné, nicméně metoda byla principiálně správná. Aristarchos ještě neměl odhad „základny“ – délku zemského poloměru, proto se musel spokojit s pokusem určit poměr délek stran v pravoúhlém trojúhelníku Země-Měsíc-Slunce, kde Měsíc je ve vrcholu pravého úhlu. Zmíněnou konfiguraci těchto tří těles určoval z pozorování měsíčního kotouče v okamžiku, kdy je přesně jedna jeho polovina ve stínu (obr. 4).



Obr. 4

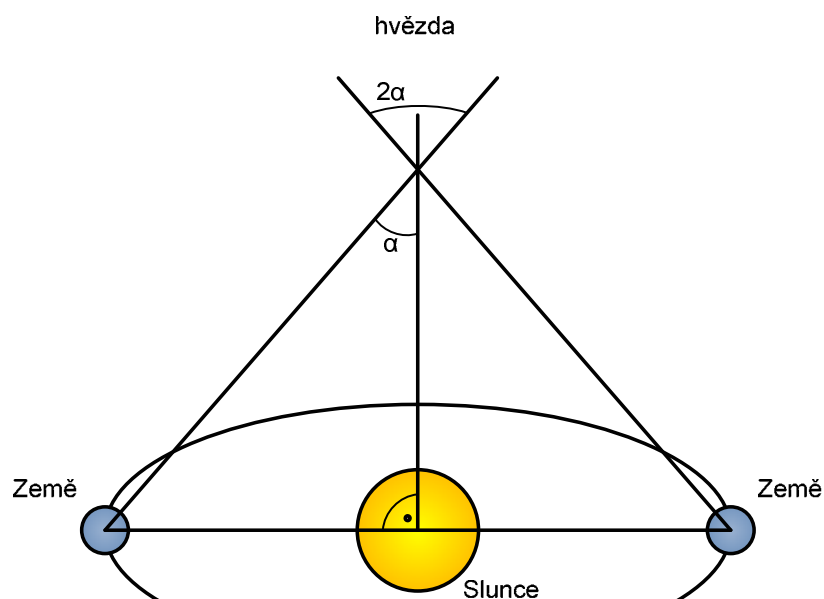
Velikost zmíněného úhlu β odhadl na 3° , z toho získal poměr vzdáleností Země-Měsíc a Země-Slunce 1:19. To zdaleka neodpovídá skutečnosti. Ve skutečnosti je velikosti tohoto úhlu pouhých 9 úhlových minut a uvedený poměr je asi 20krát menší. Ze vzdálenosti Měsíce a Slunce od Země vypočítaných pomocí paralaxy těchto těles můžeme pomocí zorného úhlu Měsíčního a slunečního kotouče (velikost tohoto úhlu je pro obě tělesa stejná a rovná se $\frac{1}{2}^\circ$) odhadnout průměr Měsíce a Slunce. O odhad rozměrů těchto nebeských těles vztažených k průměru Země se také pokusil již Aristarchos, vyšel

však z nesprávného odhadu velikosti zorného úhlu obou těles 2° , takže získal velmi nepřesné údaje. Pro srovnání je uvedena tabulka Aristarchových a novodobých výsledků (za jednotku je vzat průměr Země):

	Aristarchos	dnešní měření
Průměr Měsíce	0,36	0,27
Průměr Slunce	6,75	108,9
Vzdálenost Měsíc-Země	9,5	30,2
Vzdálenost Slunce-Země	180,0	11 726,0

Jako příklad, jak obtížně se prosazovaly pokrokovější názory na vesmír v relativně vyspělé společnosti starověkého Řecka, uveďme osud filozofa *Anaxagora* (4. stol. před n. l.). Anaxagoras učil, že Slunce je velké jako celý poloostrov Peloponés a byl za tento názor perzekvován. Aténský dvůr se cítil uražen názorem, že by Slunce mohlo být srovnatelné s rozlohou Řecka.

Metodou paralaxy lze odhadnout též vzdálenosti hvězd. Vzhledem k nepoměrné vzdálenosti hvězd ke vzdálenosti Měsíce nebo Slunce od Země je třeba vzít větší „základnu“, za níž se bere střední vzdálenost Země-Slunce, tj. $1,5 \cdot 10^8$ km. Paralaxa hvězdy je velikost zorného úhlu střední vzdálenosti Země-Slunce pozorované v kolmém směru ve vzdálenosti dané hvězdy. Přesně je definována opět z pravoúhlého trojúhelníku podle obr. 5.



Obr. 5

Tento úhel se projeví v úhlovém posunutí hvězdy během roku, které vzniká jako zdánlivý pohyb hvězdy vlivem otáčení Země kolem Slunce během roku. Bylo vážnou námitkou proti Aristarchovu heliocentrismu podobně jako o více než 17. století později proti učení Koperníkovu, že paralaktický pohyb hvězd nebyl pozorován. Teprve později se vyjasnilo, že tento pohyb není v mezích tehdejších pozorovacích možností. Paralaxy hvězd byly změřeny až v 19. století; první přesně změřená paralaxa hvězdy (jedné z nejbližších) má hodnotu 0,348 úhlových vteřin, z toho plyne vzdálenost hvězdy od Země více než $6 \cdot 10^5$ větší než vzdálenost Země-Slunce.

Uvedené náměty s výrazným poznávacím momentem a mezipředmětovými vztahy lze příležitostně využít při výuce matematiky v gymnáziu (případně i ZŠ) spolu s kapesním kalkulátorem jako motivaci nebo aplikaci učiva o délce kružnicového oblouku, obloukové míře nebo v souvislosti se vztahy

$\sin x \approx x$ nebo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nebo též jako podnět k vyhledávání a ověřování neznámých dat a dalších informací v odborné literatuře.

Tématika námětu je podstatně prohloubena a rozšířena zejména směrem k fyzikálním výsledkům ve stati Křížek M, *Význam úhlových měření při poznávání vesmíru*, Pokroky mat. fyz. astronom. 51 (2006), č.2, 1- 14

Literatura:

- [1] HOUSKA, J. *Náměty z historie měření Země a vesmíru pro výuku matematiky*. Matematika a fyzika ve škole. 1979/1980, roč. 10, č. 6, str. 411 – 415.
- [2] HORSKÝ, Z., PLAVEC, M. *Poznávání vesmíru*. Praha: Orbis, 1962, MME 37.
- [3] FREUDENTHAL, H. *Matematika v okruhu nás*, překlad z němčiny. Moskva: Mir, 1977.
- [4] ŠIROKÝ, J., ŠIROKÁ, M. *Základy astronomie v příkladech*. Praha: SPN, 1966.