Příklady

Aritmetické hry

1. Vyjádřete pomocí znamének **+**, **-**, **×**, **÷** a stejných číslic číslo 30.
   Výsledek:

2. Součet tří čísel, z nichž jedno je zapsáno jednou jedničkou a čtyřmi dvojkami, druhé jednou dvojkou a čtyřmi trojkami, třetí jednou jedničkou, dvěma dvojkami, jednou trojkou a jednou čtyřkou je 98 765. Zapište všechny tři sčítance.
   Výsledek:

3. Z obou konečných zastávek tramvajové linky č. 21 vyjíždí ve stejnou dobu každých 10 minut jedna souprava. Doba jízdy soupravy z jedné konečné na druhou je 60 minut. Kolik protijedoucích souprav stejné linky potká řidič během jedné jízdy z jedné konečné zastávky na druhou?
   Řešení:

Magické čtverce

1. Doplňte prázdná políčka čísly 1 až 6 tak, aby součty čísel v řádcích, sloupcích i na každé úhlopříčce byly vždy 15.

	7	
		9
8		

Řešení:

2. Doplňte prázdná políčka na obrázku tak, aby součty zlomků v řádcích, sloupcích i na každé úhlopříčce byly vždy 1.

$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{5}{12}$		

Řešení:

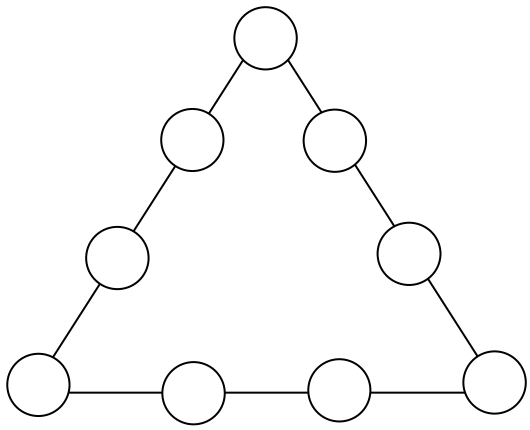
3. Doplňte prázdná políčka na obrázku tak, aby součty čísel v řádcích, sloupcích i na každé úhlopříčce byly stejné.

1,6		
	-1,4	0,6
		-4,4

Řešení:

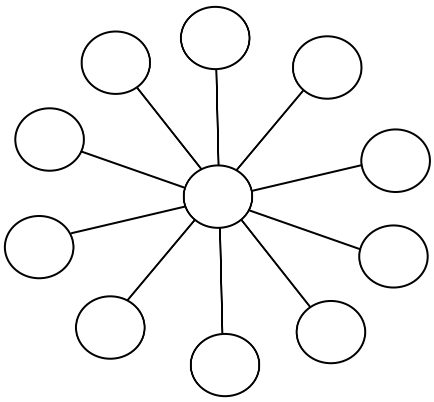
Jiná aritmetická schémata

1. Do prázdných kroužků v obrázku doplňte čísla 1 až 9 tak, aby součet čísel na každé straně trojúhelníku byl 17.



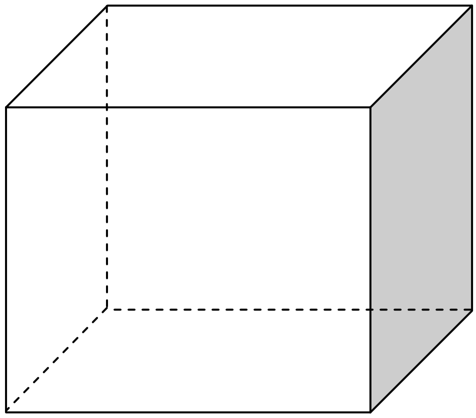
[Řešení:](#)

2. Do prázdných kroužků v obrázku doplňte čísla 2 až 12 tak, aby součet tří čísel na každé úsečce byl 21.



[Řešení:](#)

3. Označte vrcholy krychle čísly 1 až 8 tak, aby součet čtyř čísel v každé stěně byl 18.



Řešení:

Číselné a obrázkové řady

1. Doplňte další tři členy řady tvořené podle určitého pravidla.

   1 3 7 15 31 . . .

   Řešení:

2. Doplňte další čtyři obrázky do řady tvořené podle určitého pravidla

   Řešení:

Algebrogramy

1. Nahraďte písmena číslicemi tak, aby platil součet (stejná písmena znamenají stejné číslice, různá písmena různé číslice).

$$\begin{array}{cccc} B & O & T & A \\ & O & T & A \\ & & T & A \\ & & & A \\ \hline B & B & B & B \end{array}$$

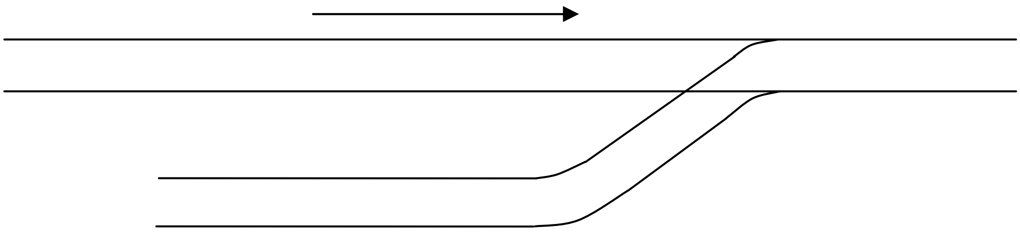
Řešení:

Logické úlohy

1. Matka, otec a dvě děti se mají přeplavit přes řeku. Otec váží 80 kg, matka 70 kg, každé dítě 40 kg. Jak se přes řeku přeplaví, mají-li k dispozici pouze jednu loďku, která může uvést pouze 100 kg?

   Řešení:

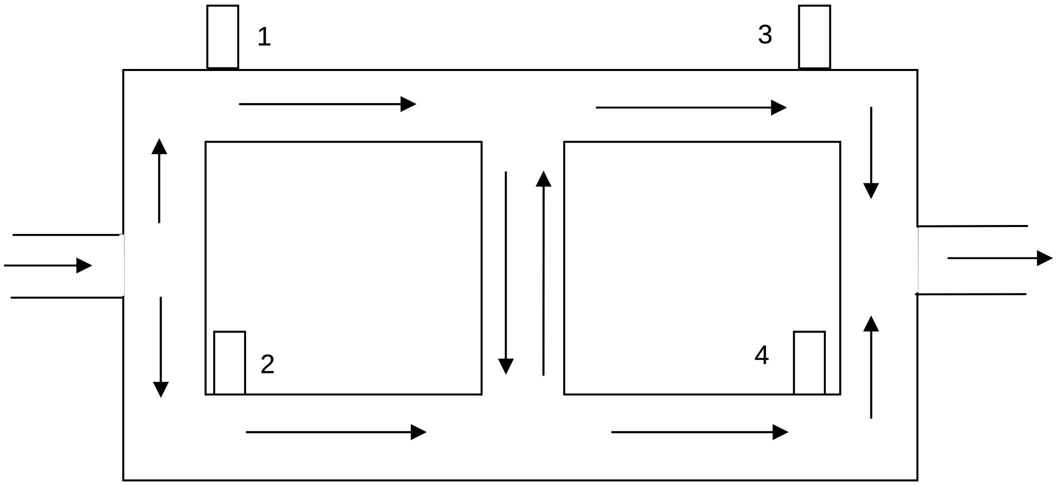
2. Na jednokolejné trati jede (ve směru šipky) osobní vlak, který má lokomotivu a dva vagóny, a za ním jede rychlík. Ve stanici odbočuje slepá kolej (viz obrázek), na kterou se vejdou pouze dva vagóny nebo lokomotiva. Rychlík má předjet osobní vlak. Jak má přednosta stanice zorganizovat posun, aby rychlík mohl předjet osobní vlak?



   Řešení:

Úlohy kombinatorického charakteru

1. Náměstí je průjezdné ve směru šipek. Na příjezdu a výjezdu jsou umístěny celkem čtyři světelné semafory (viz obrázek).



a) Vypište všechny různé možnosti rozsvícení světel na všech čtyřech semaforech současně (uvažujte pouze dvě světla: červenou – C a zelenou – Z)

Řešení:

b) Při kolika situacích je náměstí průjezdné?

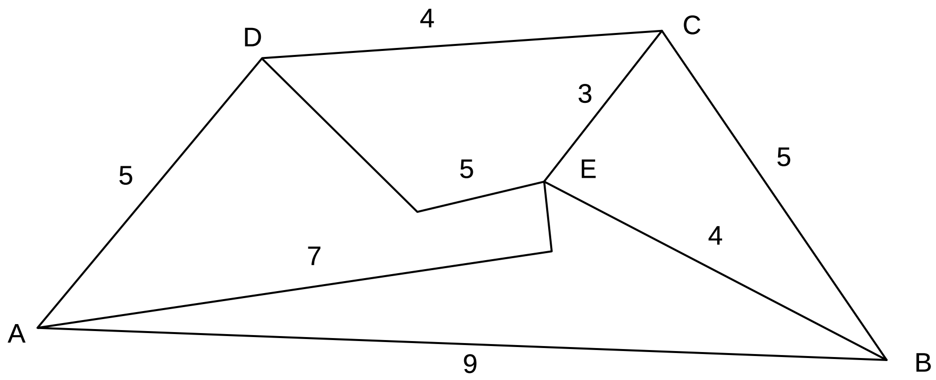
Řešení:

2. V běžeckém závodě proběhli tři závodníci (se startovními čísly 1, 2, 3) cílem každého kola v jiném pořadí. V jeho průběhu se právě jednou vystřídala všechna možná pořadí, v němž závodníci probíhali cílem jednotlivých kol. Kolik kol měl tento závod?

Řešení:

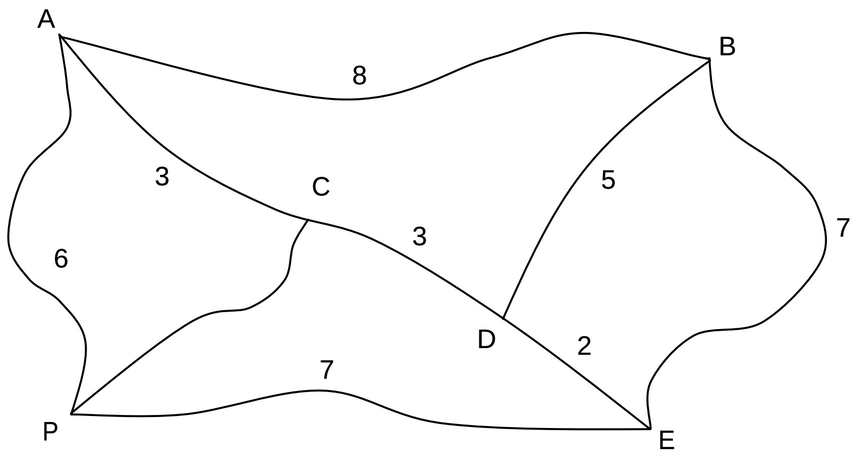
Optimalizační úlohy

1. Pět obcí (A, B, C, D, E) má být propojeno elektrickým vedením. Na obrázku jsou uvedeny délky možných spojů elektrického vedení mezi jednotlivými obcemi (v kilometrech). Navrhněte plán elektrického vedení tak, aby celkové vedení bylo co nejkratší.



[Řešení:](#)

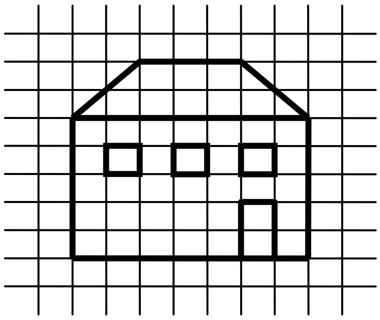
2. Z pošty v místě P vyjel na kole pošťák, který má projet okolními vesnicemi A, B, C, D, E a vrátit se zpátky na poštu P (každou obcí má projet pouze jednou). Na obrázku jsou vyznačeny cesty s udáním délky (v kilometrech). V jakém pořadí by měl projíždět vesnicemi, aby ujel co nejméně kilometrů?

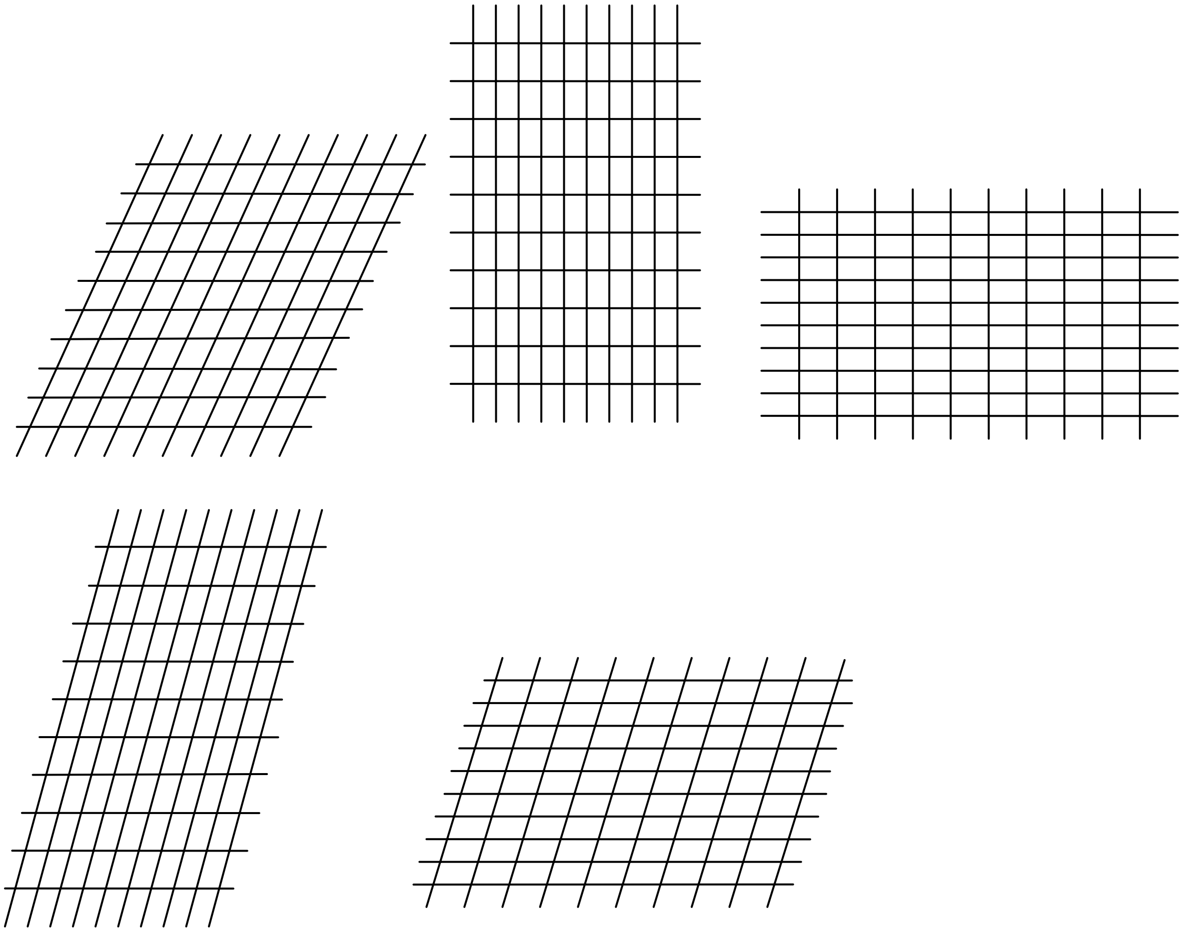


[Řešení:](#)

Úlohy s využitím transformace čtvercové sítě

1. Překreslete obrázek ze čtvercové sítě do dalších sítí.

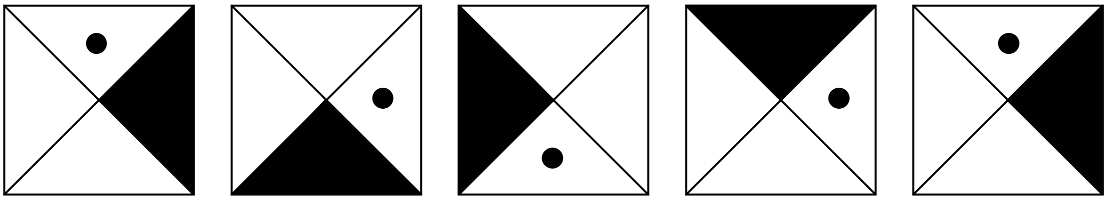




Řešení:

Pohyby v rovině

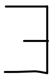
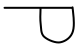
1. Který z těchto obrázků nevznikl pootočením obrázku A?



A B C D E

Řešení:

2. Doplňte do tabulky obrázky podle předpisu.

Obrázek	Pootočení			
	o ¼ otočky	o ½ otočky	o ¾ otočky	o 1 otočku
K				
L				
E				
P				

Řešení:

Diofantovské úlohy

1. Maminka koupila několik kusů kiwi po 3 Kč a několik broskví po 5 Kč. Celkem zaplatila 51 Kč. Kolik koupila kusů kiwi a kolik broskví?

   Řešení:

2. Zájezdu se má zúčastnit 195 osob. Je možno objednat dva typy autobusů, které mají 42 a 36 míst k sezení. Denní poplatek za větší autobus je 6 000 Kč a za menší 5 000 Kč. Kolik je třeba objednat větších a kolik menších autobusů, aby všichni účastníci zájezdu měli místo k sezení a celkové náklady na autobusy byly minimální?

   Řešení:

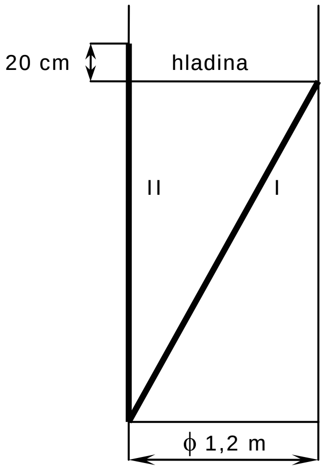
Úlohy řešené úsudkem a rovnicí

1. Jana si ušetřila peníze za Matějskou pouť. Šla na ni třikrát. Poprvé utratila polovinu ušetřené částky plus 10 Kč. Po druhé utratila polovinu zbytku plus také 10 Kč. Po třetí utratila opět polovinu zbylé částky z druhé návštěvy pouti plus 10 Kč a zbylo jí ještě 16 Kč. Kolik korun si Jana na pouť našetřila?

   Řešení:

Úlohy řešené geometrickou konstrukcí a výpočtem

1. Do válcové studny o průměru 120 cm je ponořena tyč tak, že se dotýká u stěny dolním koncem o dno této studny a horním koncem protější stěny ve výšce hladiny (viz obrázek – poloha I). Postavíme-li svisle tyč ke stěně studny tak, aby se i nadále její dolní konec dotýkal dna studny (poloha II), pak nad hladinu vyčnívá 20 cm této tyče. Jaká je hloubka vody v této studni?



Řešení:

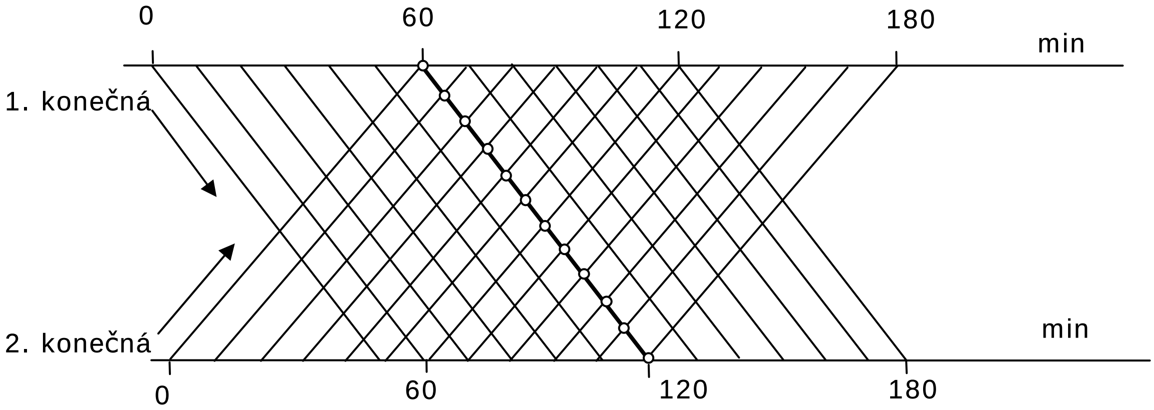
Řešení

Aritmetické hry

1. Např.: 5 . 5 + 5 ; 6 . 6 – 6 ; 33 – 3

2. 22 212; 33 332; 43 221

3. Např. graficky



Řidič potká 11 (13 - počítáme-li i okamžik výjezdu soupravy z jedné a příjezdu do druhé konečné stanice) protijedoucích souprav stejné linky.

Magické čtverce

1. Řešení:

6	7	2
1	5	9
8	3	4

nebo

3	7	5
4	2	9
8	6	1

2. Řešení:

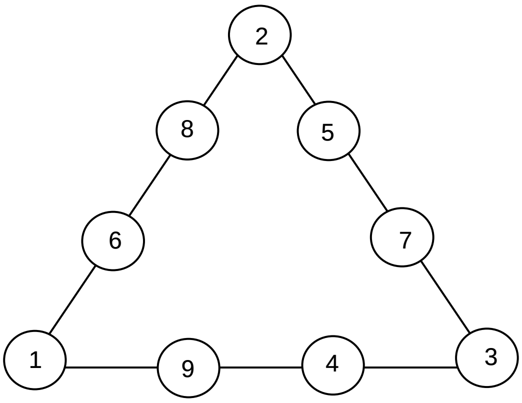
$\frac{5}{24}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{24}$
$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{14}{24}$

3. Řešení:

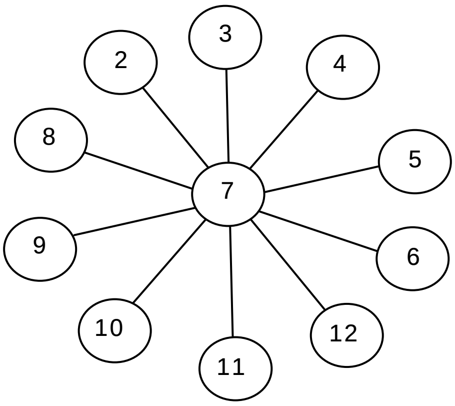
1,6	-5,4	-0,4
-3,4	-1,4	0,6
-2,4	2,6	-4,4

Jiná aritmetická schémata

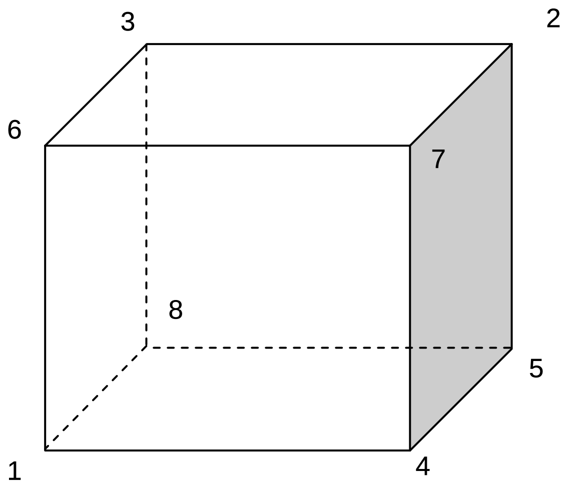
1. Např.:



2. Např.:



3. Např.:

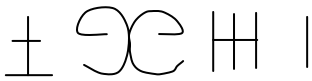


Číselné a obrázkové řady

1. Řešení:

   63 127 255

2. Řešení:

Algebrogramy

1. Řešení:

$$\begin{array}{cccc} 8 & 4 & 2 & 7 \\ & 4 & 2 & 7 \\ & & 2 & 7 \\ & & & 7 \\ \hline 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$$

Logické úlohy

1. Např.:

   → 2 děti
   ← 1 dítě
   → otec
   ← 1 dítě
   → 2 děti
   ← 1 dítě
   → matka
   ← 1 dítě
   → 2 děti

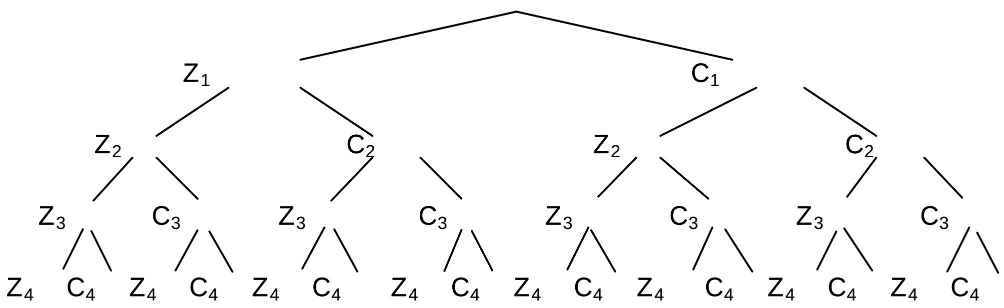
2. Řešení:

   1. osobní vlak přejede výhybku a zacouvá na slepou kolej, odpojí oba vagóny, které zanechá na slepé koleji a lokomotiva odjede dále po trati
   2. rychlík přejede výhybku, zacouvá k odpojeným vagónům osobního vlaku na slepé koleji, které připojí za své vagóny, odjede se všemi vagóny na hlavní trať a zacouvá zpět před výhybku
   3. lokomotiva osobního vlaku zacouvá na slepou kolej
   4. rychlík odpojí oba vagóny osobního vlaku a odjede po trati
   5. lokomotiva osobního vlaku vyjede na hlavní trať a zacouvá pro odpojené vagóny

Úlohy kombinatorického charakteru

1. Řešení:

a) Např. pomocí stromu logických možností:



$Z_1Z_2Z_3Z_4$	$Z_1C_2Z_3Z_4$	$C_1Z_2Z_3Z_4$	$C_1C_2Z_3Z_4$
$Z_1Z_2Z_3C_4$	$Z_1C_2Z_3C_4$	$C_1Z_2Z_3C_4$	$C_1C_2Z_3C_4$
$Z_1Z_2C_3Z_4$	$Z_1C_2C_3Z_4$	$C_1Z_2C_3Z_4$	$C_1C_2C_3Z_4$
$Z_1Z_2C_3C_4$	$Z_1C_2C_3C_4$	$C_1Z_2C_3C_4$	$C_1C_2C_3C_4$

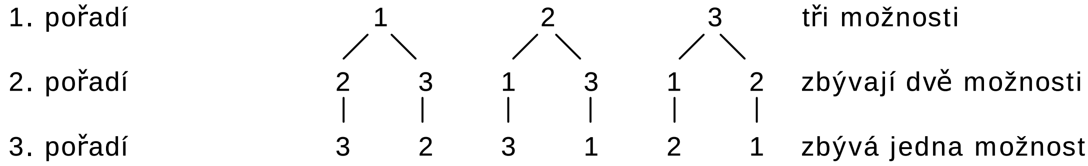
16 možností

b)

$Z_1Z_2Z_3Z_4$	$Z_1C_2Z_3Z_4$	$C_1Z_2Z_3Z_4$
$Z_1Z_2Z_3C_4$	$Z_1C_2Z_3C_4$	$C_1Z_2Z_3C_4$
$Z_1Z_2C_3Z_4$	$Z_1C_2C_3Z_4$	$C_1Z_2C_3Z_4$

9 možností

2. Např.:



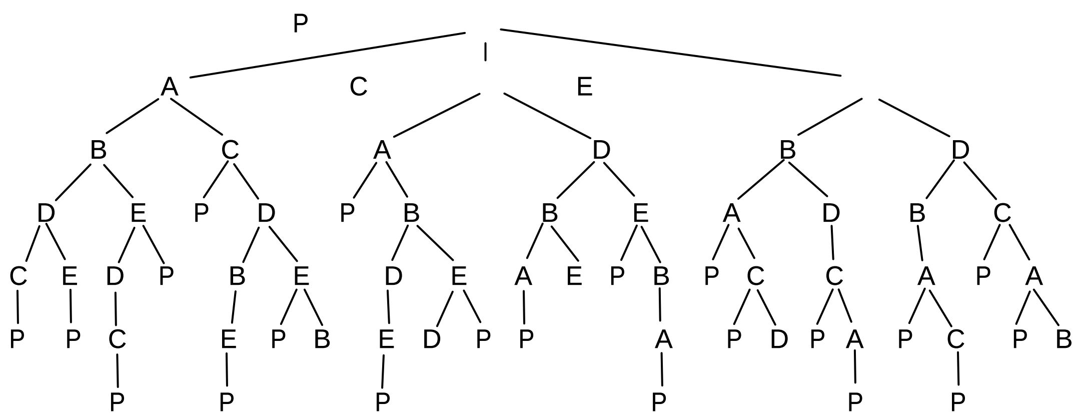
Možná pořadí:
1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1
(celkem 6 možností)
Ze stromu logických možností vyplývá: počet kol = 3 × 2 × 1 = 6
Závod měl šest kol.

Optimalizační úlohy

1. Řešení:

Celková délka vedení je dána součtem délek určité čtveřice spojů mezi dvěma obcemi. Najdeme čtveřici s nejmenším součtem délek – je to čtveřice (3, 4, 4, 5) a zjistíme zda splňuje dané požadavky. Jedná se o lomenou čáru ADCEB, která propojuje všech pět obcí.
Minimální délka vedení propojujícího pět obcí A, B, C, D, E je tedy 16 km.

2. Řešení:



Ze schématu vyplývá, že podmínku, uvedenou v zadání, splňuje šest tras:

a) P A B E D C P
b) P C D E B A P
c) P A C D B E P
d) P E B D C A P
e) P C A B D E P
f) P E D B A C P

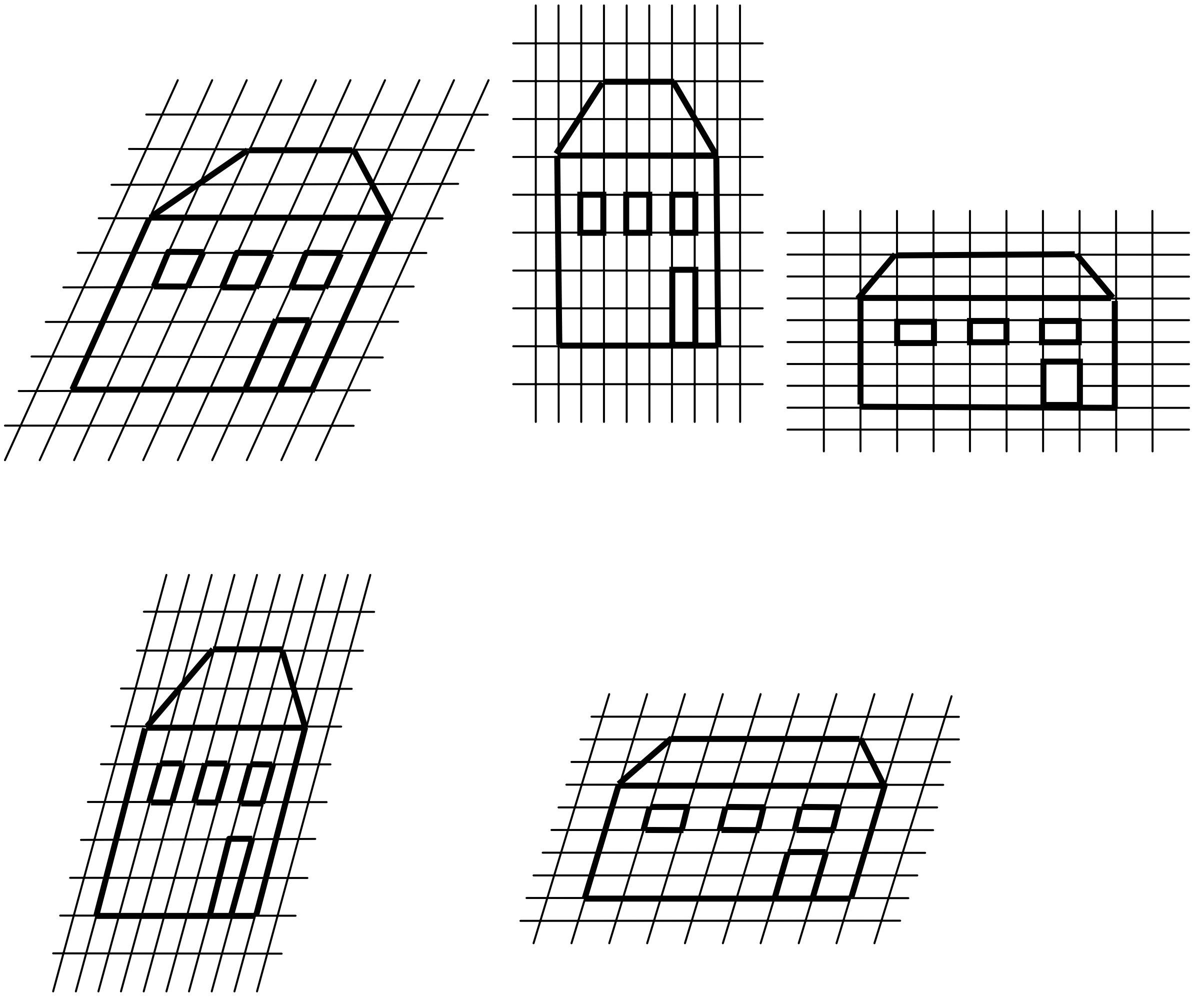
Dvojice cest v případě a) a b) se liší pouze směrem projíždění obcí, celková délka cesty je stejná. Obdobně je tomu i v případě dvojice cest c) a d) a dvojice e) a f).

Součtem délek jednotlivých úseků zjistíme délky jednotlivých tras.
a) (6 + 8 + 7 + 2 + 3 + 4) km = 30 km
b) 30 km
c) (6 + 3 + 3 + 5 + 7 + 7) km = 31 km
d) 31 km
e) (4 + 3 + 8 + 5 + 2 + 7) km = 29 km
f) 29 km

Nejkratší je trasa e) (P C A B D E P) nebo f) (P E D B A C P).

Úlohy s využitím transformace čtvercové sítě

2. Řešení:

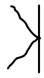
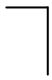
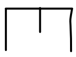
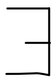
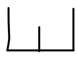
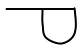
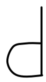
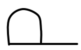


Pohyby v rovině

3. Řešení:

   Obrázek D.

4. Řešení

Obrázek	Pootočení			
	o ¼ otočky	o ½ otočky	o ¾ otočky	o 1 otočku
K				K
L				L
E				E
P				P

Diofantovské úlohy

1. Řešení:

a) experimentální

Maminka koupila x kusů kiwi a y kusů broskví.

Platí (v Kč): $3x + 5y = 51$

Do tohoto vztahu dosazujeme přirozená čísla za y a hledáme případ, kdy také x je přirozené číslo. Zjistíme, že tento případ nastane pro y = 3, y = 6, y = 9. Těmto hodnotám odpovídá po řadě: x = 12, x = 7, x = 2.

Úloha má 3 řešení.

Maminka koupila 12 kiwi a 3 broskve, nebo 7 kiwi a 6 broskví, nebo 2 kiwi a 9 broskví.
(Úlohu lze řešit s využitím tabulky.)

b) pomocí algebry

Maminka koupila x kusů kiwi a y kusů broskví.
Platí (v Kč): $3x + 5y = 51$

$$x = \frac{51 - 5y}{3}$$

$$x = 17 - \frac{5y}{3}$$

Řešení (v oboru přirozených čísel) dostaneme pro $y = 3$ ($x = 12$), pro $y = 6$ ($x = 7$), pro $y = 9$ ($x = 2$).
Maminka koupila 12 kiwi a 3 broskve, nebo 7 kiwi a 6 broskví, nebo 2 kiwi a 9 broskví.

2. Řešení:

Označme počet větších autobusů x a počet menších autobusů y. Pak počet míst v těchto autobusech dohromady je $42x + 36y$ a musí být 195 nebo větší než 195.
Celková cena (v Kč) za 1 den zájezdu za autobusy je $(6\,000x + 5\,000y)$

Sestavíme tabulku.

Počet větších autobusů (x)	0	1	2	3	3	4	5
Počet menších autobusů (y)	6	5	4	3	2	1	0
Počet sedadel ve všech autobusech	216	222	228	234	198	204	210
Celková cena za autobusy za 1 den (v Kč)	30 000	31 000	32 000	33 000	28 000	29 000	30 000

Z tabulky vyplývá, že nejmenší celkové náklady na autobusy jsou v případě objednání tří větších a dvou menších autobusů (28 000 Kč na 1 den).

Úlohy řešené úsudkem a rovnicí

1. Řešení:

a) úsudkem - syntetické

Vyjdeme z daných údajů „od konce situace“.
Jestliže při třetí návštěvě utratila polovinu zbytku z druhé návštěvy plus 10 Kč a zbylo jí 16 Kč, je polovina tohoto zbytku 26 Kč, tj. celý zbytek je 52 Kč.
Podobně polovina druhého zbytku je (52 + 10) Kč = 62 Kč, takže celý zbytek je 124 Kč a polovina původního obnosu je (124 + 10) Kč = 134 Kč. Celý obnos tedy je (2 x 134) Kč = 268 Kč.

Zkouška:
Po 1. návštěvě Janě zbylo
$\left(\frac{1}{2}\,.\,268-10\right)$Kč = 124 Kč.
Po 2. návštěvě Janě zbylo
$\left(\frac{1}{2}\,.\,124-10\right)$Kč = 52 Kč
Po 3. návštěvě Janě zbylo
$\left(\frac{1}{2}\,.\,52-10\right)$Kč = 16 Kč, což odpovídá textu úlohy.
Jana si ušetřila 268 Kč.

b) rovnicí – analytické

Ušetřený obnos označíme x.
Při 1. návštěvě Jana utratila
$\left(\frac{x}{2}+10\right)$Kč.
Při 2. návštěvě Jana utratila
$\left[\frac{1}{2}\,.\left(\frac{x}{2}-10\right)+10\right]$Kč.
Při 3. návštěvě Jana utratila
$\left\{\frac{1}{2}\,.\left[\frac{1}{2}\,.\left(\frac{x}{2}-10\right)+10\right]\right\}$Kč.
Sestavíme a řešíme rovnici:

$$\left(\frac{x}{2}+10\right)+\left[\frac{1}{2}\,.\left(\frac{x}{2}-10\right)+10\right]+\left[\frac{1}{2}\,.\left(\frac{x}{2}-10\right)+10\right]=x-16$$

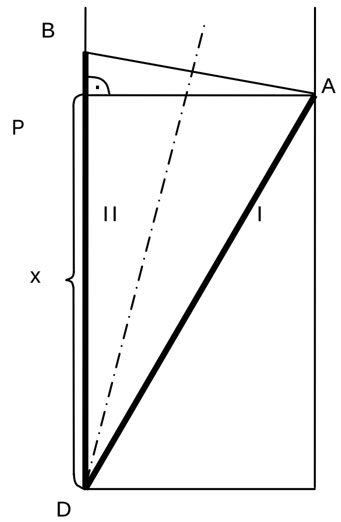
$$x = 268$$

Jana si ušetřila 268 Kč.

Úlohy řešené geometrickou konstrukcí a výpočtem

1. Řešení:

Označme v obrázku spodní konec tyče bodem *D*, vrchol tyče v poloze I bodem *A*, vrchol tyče v poloze II bodem *B*, průsečík tyče s hladinou v poloze II bodem *P*.



a) geometrickou konstrukcí

Z obrázku je vidět, že lze sestrojit pravoúhlý trojúhelník *ABP* s pravým úhlem při vrcholu *P* (známe délky jeho obou odvěsen: $|AP| = 120$ cm, $|BP| = 20$ cm). Je třeba sestrojit bod *D*, protože délka úsečky *DP* udává hloubku vody ve studni. Trojúhelník *ABD* je rovnoramenný se základnou *AB* ($|AD| = |BD|$). Bod *D* tedy získáme jako průsečík přímky *BP* s osou úsečky *AB*. Délku úsečky *PD*, která odpovídá hloubce vody ve studni, zjistíme měřením (obrázek sestrojíme ve vhodně zvoleném měřítku).

2. $\Delta\, ABP$
3. o; o je osa úsečky AB
4. p; $BP \in p$
5. D; $D \in p \cap o$
6. PD

b) výpočtem

Platí: $|AP| = 1{,}2$ m, $|BP| = 0{,}2$ m, $|AD| = |BD|$. Je třeba vypočítat délku úsečky *PD*, která odpovídá hloubce vody ve studni.
Jestliže označíme $x = |PD|$, platí:
$|AD| = |BD| = |PD| + |BP| = x + 0{,}2$ m.

Protože trojúhelník *APD* je pravoúhlý, platí podle Pythagorovy věty:

$$x^2 + (1{,}2\ \text{m})^2 = (x + 0{,}2\ \text{m})^2$$
$$x^2 + 1{,}44 = x^2 + 0{,}4x + 0{,}04$$
$$1{,}44 - 0{,}04 = 0{,}4x$$
$$x = 3{,}5$$
$x = 3{,}5$ m

Zkouška:
délka tyče
3,5 m + 0,2 m = 3,7 m
z trojúhelníku *APD*
$\sqrt{x^2 + 1{,}2^2}$ m = $\sqrt{3{,}5^2 + 1{,}2^2}$ m = $\sqrt{12{,}25 + 1{,}44}$ m = $\sqrt{13{,}69}$ m = 3,7 m
Hloubka vody ve studni je 3,5 m.